Université Cadi Ayyad, Marrakech
Ecole Nationale des Sciences Appliquées, Safi

Cours de Mécanique du solide

Module : Mécanique 2

Filière sciences et techniques pour l'ingénieur

2ème année cycle préparatoire

Année universitaire 2017/2018

A. EL-ABIDI

Scanned by CamScanner

Chapitre 1:

Compléments mathématiques

1- Opérations sur les vecteurs

- **Produit scalaire :**
  Le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{U}(u_1,u_2,u_3)$ et $\vec{V}(v_1,v_2,v_3)$ d'un espace vectoriel à 3 dimension est défini par :

$$\vec{U}.\vec{V}=\sum_{i=1}^{3}u_i.v_i=\left\|\vec{U}\right\|.\left\|\vec{V}\right\|.\cos\left(\hat{\vec{U},\vec{V}}\right)$$

- **Produit vectoriel :**
  Dans l'espace vectoriel à 3 dimensions, le produit vectoriel entre deux vecteurs $\vec{U}(u_1,u_2,u_3)$ et $\vec{V}(v_1,v_2,v_3)$ est un vecteur $\vec{W}(w_1,w_2,w_3)$ perpendiculaire au plan formé par $\vec{U}$ et $\vec{V}$ noté : $\vec{W}=\vec{U}\wedge\vec{V}$ et de norme : $\left\|\vec{W}\right\|=\left\|\vec{U}\right\|.\left\|\vec{V}\right\|.\sin(\hat{\vec{U},\vec{V}})$. Ces composantes s'écrivent : $\begin{cases}w_1=u_2v_3-u_3v_2\\w_2=u_3v_1-u_1v_3\\w_3=u_1v_2-u_2v_3\end{cases}$

Propriétés :

- ✓ Le produit vectoriel est :

  Antisymétrique: $\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2=-\vec{V}_2\wedge\vec{V}_1$

  Distributif: $\vec{V}_1\wedge(\vec{V}_2+\vec{V}_3)=(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2)+(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_3)$

- ✓ Le produit vectoriel n'est pas associatif: $\vec{V}_1\wedge(\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3)\neq(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2)\wedge\vec{V}_3$

- **Double Produit vectoriel :**
  Le Double Produit vectoriel $\vec{U}\wedge(\vec{V}\wedge\vec{W})$ est un vecteur contenu dans le plan formé par $\vec{V}$ et $\vec{W}$ avec: $\vec{U}\wedge(\vec{V}\wedge\vec{W})=(\vec{U}.\vec{W}).\vec{V}-(\vec{U}.\vec{V}).\vec{W}$

- **Produit mixte :**

$$(\vec{U}\wedge\vec{V}).\vec{W}=(\vec{W}\wedge\vec{U}).\vec{V}=(\vec{V}\wedge\vec{W}).\vec{U}$$

- **Division vectorielle :**
  Soit l'équation vectorielle suivante : $\vec{U}\wedge\vec{X}=\vec{V}$; $\vec{U}$ et $\vec{U}$et $\vec{V}$sont deux vecteurs orthogonaux et non nuls. Le vecteur solution de cette équation s'écrit :

Scanned by CamScanner

$$\vec{X} = \frac{\vec{V} \wedge \vec{U}}{\|\vec{U}\|^2} + \lambda \vec{U} \quad (\lambda \in IR) \qquad \text{(Démonstration voir TD série 1)}$$

2-Champ de vecteurs

2.1- Définition

Un champ de vecteurs $\vec{M}(P)$ est une application de l'espace affine E_A dans l'espace vectoriel euclidien E_V:

$$\vec{M} : E_A \longrightarrow E_V$$
$$P \longrightarrow \vec{M}(P)$$

2.2- Champ uniforme

Un champ de vecteurs $\vec{M}(P)$ est dit uniforme sur un domaine (D) si sa valeur est indépendante du point $P \in (D)$

$$\vec{M}(P) = \vec{M}(Q) \qquad \forall P, Q \in (D)$$

2.3- Champ antisymétrique

Un champ de vecteurs $\vec{M}$ est antisymétrique, si il existe un vecteur $\vec{R}$, tel que :

$\forall P, Q \qquad \vec{M}(P) = \vec{M}(Q) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$

C'est-à-dire il existe une application linéaire antisymétrique L tel que :

$\forall P, Q \qquad \vec{M}(P) = \vec{M}(Q) + L(\overrightarrow{QP}) = \vec{M}(Q) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$

On démontre (voir TD) que la matrice associée à l'application linéaire antisymétrique L dans une base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ s'écrit :

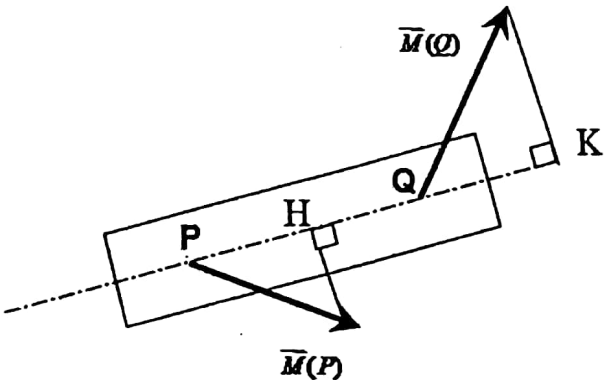
$$L = \begin{pmatrix} 0 & L_{12} & L_{13} \\ -L_{12} & 0 & L_{23} \\ -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et que : } \vec{R} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \left[\vec{e}_i \wedge L(\vec{e}_i) \right]$$

2.4- Champ équiprojectif

Un champ de vecteurs $\vec{M}$ est équiprojectif si :

$\forall P, Q \qquad \vec{M}(P).\overrightarrow{PQ} = \vec{M}(Q).\overrightarrow{PQ}$

Ce qui traduit l'égalité des projections orthogonales de vecteurs $\vec{M}(P)$ et $\vec{M}(Q)$ sur la droite (PQ)



PH = QK

2.5- Théorème de Delassus

Scanned by CamScanner

Tout champ de vecteurs antisymétrique est équiprojectif et réciproquement.

En effet :

Soit $\overrightarrow{M}$ un champ antisymétrique. Donc $\forall P,Q \quad \overrightarrow{M}(P)=\overrightarrow{M}(Q) \quad +\overrightarrow{R}\wedge\overrightarrow{QP}$

En multipliant par le vecteur $\overrightarrow{PQ}$, il vient : $\overrightarrow{M}(P).\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{M}(Q).\overrightarrow{PQ} \quad +\left(\overrightarrow{R}\wedge\overrightarrow{QP}\right).\overrightarrow{PQ}$

Or : $\left(\overrightarrow{R}\wedge\overrightarrow{QP}\right).\overrightarrow{PQ}=0$

D'où : $\overrightarrow{M}(P).\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{M}(Q).\overrightarrow{PQ}$ .Donc le champ de vecteurs $\overrightarrow{M}$ est équiprojectif.

3- Torseurs

3.1- Définition

On appelle $[T]$ un torseur, l'ensemble d'un champ antisymétrique et de son vecteur. Il s'écrit en un point P de l'espace affine E_A :

$$[T]=\begin{cases}\overrightarrow{R} & \text{: C'est la résulante du torseur (indépendante de P).}\\ \overrightarrow{M}(P) & \text{: C'est le moment du torseur en P (dépendant de P).}\end{cases}_P$$

- L'ensemble formé par $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{M}(P)$ constitue les éléments de réduction du torseur en P
- La connaissance de $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{M}$ en un point particulier A de l'espace E_A détermine complètement le torseur en tout point P de l'espace E_A :

$$\overrightarrow{M}(P)=\overrightarrow{M}(A) \quad +\overrightarrow{R}\wedge\overrightarrow{AP}$$

3.2- Opérations sur les torseurs

On considère dans toutes les opérations qui suivent deux torseurs : $[T_1]$ et $[T_2]$ définis au même point P par:

$$[T_1]=\begin{cases}\overrightarrow{R_1}\\ \overrightarrow{M_1}(P)\end{cases}_P \quad \text{et} \quad [T_2]=\begin{cases}\overrightarrow{R_2}\\ \overrightarrow{M_2}(P)\end{cases}_P$$

- **Egalité :**

$$[T_1]=[T_2]\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{R_1}=\overrightarrow{R_2}\\ \overrightarrow{M_1}(P)=\overrightarrow{M_2}(P) \quad \forall P\end{cases}$$

- **Somme :**

La somme de deux torseurs : $[T_1]$ et $[T_2]$ est un torseur $[T]$:

$$[T]=[T_1]+[T_2] \text{ avec : } [T]=\begin{cases}\overrightarrow{R}=\overrightarrow{R_1}+\overrightarrow{R_2}\\ \overrightarrow{M}(P)=\overrightarrow{M_1}(P)+\overrightarrow{M_2}(P)\end{cases}_P$$

- **Produit ou comoment :**

Le produit de deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ est scalaire qu'on appelle comoment :

$$[T_1].[T_2]=\overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_2}(P)+\overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_1}(P)$$

Remarque : Le comoment de deux torseurs est indépendant du point P

Scanned by CamScanner

Multiplication par un scalaire :
La multiplication d'un torseur $[T_1]$ par un scalaire λ est le torseur $[T]$ défini par :

$$[T]=\lambda[T_1]=\begin{cases}\vec{R}=\lambda\vec{R_1}\\ \vec{M}(P)=\lambda\vec{M}_1(P)\end{cases}_P$$

- **Dérivé d'un torseur :**
La dérivée d'un torseur par rapport au temps t est un torseur dont les éléments de réduction sont :

$$[T]=\frac{d[T_1]}{dt}=\begin{cases}\vec{R}=\frac{d\vec{R_1}}{dt}\\ \vec{M}(P)=\frac{d\vec{M}_1(P)}{dt}\end{cases}_P$$

3.3- Propriétés des torseurs

- **Torseur nul**
Un torseur est nul est un torseur dont les éléments de réduction sont nuls :

$$[T]=0\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{R}=\vec{0}\\ \vec{M}_1(P)=\vec{0}\end{cases}\quad\forall P$$

- **Invariant scalaire**
On appelle invariant scalaire d'un torseur $[T]$ le scalaire noté I_s défini comme le produit scalaire des éléments de réduction de $[T]$ au point P :

$$I_s=\vec{R}.\vec{M}(P)$$

Remarque :
L'invariant I_s est indépendant du choix du point P

Démonstration :
Si l'on considère un second point Q de E_a il vient :

$$\vec{R}.\vec{M}(Q)=\vec{R}.\left(\vec{M}(P)+\vec{R}\wedge\overrightarrow{PQ}\right)=\vec{R}.\vec{M}(P)+\vec{R}.(\vec{R}\wedge\overrightarrow{PQ})=\vec{R}.\vec{M}(P)=I_S$$

$$car:\vec{R}.(\vec{R}\wedge\overrightarrow{PQ})=0$$

4- Torseurs particuliers

4.1- Torseur Glisseur

- Un torseur $[T]$ est un glisseur qu'on note $[G]$ s'il existe un point P où son moment $\vec{M}(P)$ est nul :

$$\exists P/\ [T]=\begin{cases}\vec{R}\neq\vec{0}\\ \vec{M}(P)=\vec{0}\end{cases}_P$$

Dans ce cas, le moment de [T] en un autre point Q s'écrit :

$$\vec{M}(Q)=\vec{R}\wedge\overrightarrow{PQ}$$

- En général, pour qu'un torseur $[T]$ de résultante $\vec{R}$ non nulle soit glisseur, il faut et il suffit que son invariant scalaire soit nul.

Scanned by CamScanner

$[T]$ est un glisseur $[G] \Leftrightarrow \overline{R} \neq \vec{0}$ et $I_s = 0$

4.2 -Torseur Couple

- Un torseur $[T]$ est un couple qu'on note $[C]$ si sa résultante $\overline{R}$ est nulle.

$$[C] = \begin{cases} \overline{R} = \vec{0} \\ \overline{M}\ (P) \neq \vec{0} \end{cases}_P$$

Le couple a aussi pour propriété, un invariant scalaire nul *(Is=0)*.

Scanned by CamScanner

pitre 2:

Cinématique

1-Propriétés cinématiques du solide indéformable

1.1-Notion de solide indéformable

Un solide dit indéformable si la distance entre deux points de ce dernier ne varie pas au cours du temps. Si A et B sont deux points liés à un solide. Alors : $\|\overrightarrow{AB}\| = cte \quad \forall t$

1.2- Notion de référentiel

On confond dans ce cours la notion de référentiel et repère d'espace car tous les repères en mécanique classique sont munis d'une même horloge ou repère de temps.
Les repères que nous allons introduire dans ce cours sont :

Repère fixe ou absolu : $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$

Repères intermédiaires : $R_i(O_i,\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{y_i},\overrightarrow{z_i})$

Repère lié : $R_s(O_s,\overrightarrow{x_s},\overrightarrow{y_s},\overrightarrow{z_s})$

1.3- Rappel : Formule de la dérivation de Bour

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque et R et R_0 sont deux repères. On a :

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R} + \vec{\Omega}_{(R/R_0)} \wedge \vec{u}$$

$\vec{\Omega}_{(R/R_0)}$ Est le vecteur instantané de rotation de R par rapport R_0

1.4- Distribution des vitesses dans un solide : torseur cinématique

indéformable

1.4.1- Définition

On appelle $\vec{V}_t(S/R)$, le champ des vitesses du solide S par rapport au repère fixe R à l'instant t, le champ qui à tout point P on associe le vecteur vitesse de ce point matériel :

$$\vec{V}(P \in S/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right|_R$$

1.4.2- Propriétés du champ des vitesses

Le champ des vitesses est un champ vectoriel antisymétrique.
En effet :
Soient A et B deux points quelconques liés à un solide S. Alors :

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = cte \quad \forall t \Leftrightarrow \frac{d\|\overrightarrow{AB}\|^2}{dt} = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{d(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB})}{dt}\right|_{R_0} = 0 \quad \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{AB}.\left.\frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}\right|_{R_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\left[\left.\frac{d(\overrightarrow{OB})}{dt}\right|_{R_0} - \left.\frac{d(\overrightarrow{OA})}{dt}\right|_{R_0}\right] = 0$$

Scanned by CamScanner

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = cte \quad \forall t \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\left[\vec{V}(B\in S/R_0)-\vec{V}(A\in S/R_0)\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{V}(B\in S/R_0)=\overrightarrow{AB}.\vec{V}(A\in S/R_0)$$

Le champ des vitesses du solide S par rapport à R_0 est équiprojectif et par conséquent il e
aussi antisymétrique. C'est-à-dire qu'il existe un vecteur $\vec{R}$ tel que :

$$\vec{V}(B\in S/R_0)=\vec{V}(A\in S/R_0)+\vec{R}\wedge\overrightarrow{AB}$$

Ce qui montre que le champ des vitesses du solide (S) par rapport à R_0 est un torseur.

Déterminons la résultante $\vec{R}$ du torseur cinématique :

$$\left.\frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}\right|_{R_S} + \vec{\Omega}_{R_S/R_0}\wedge\overrightarrow{AB}$$

$$puisque: \left.\frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}\right|_{R_S} = 0 \quad donc: \left.\frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}\right|_{R_0} = \vec{\Omega}_{R_S/R_0}\wedge\overrightarrow{AB}$$

D'où la relation de Varignon : $\boxed{\vec{V}(B\in S/R_0)=\vec{V}(A\in S/R_0)+\vec{\Omega}_{R_S/R_0}\wedge\overrightarrow{AB}}$

Et : $\vec{R}=\vec{\Omega}_{R_S/R_0}=\vec{\Omega}_{S/R_0}$ c'est le vecteur instantané de rotation du solide S par rapport à R_0

Remarques :

- $\vec{\Omega}_{S/R_0}$: vecteur instantané de rotation, dépend du mouvement du solide, mais pas de A et B.
- $\vec{\Omega}_{S/R_0}$ dépend du temps.
- $\vec{\Omega}_{S/R_0}$ dépend du référentiel R_0.

1.4.3- Torseur cinématique

D'après ce qui précède on remarque bien qu'on peut représenter le champ de distribution des vitesses du solide S par rapport à un repère de référence R_0 par un torseur qu'on nommera : torseur cinématique ou torseur de vitesse. Ce torseur noté $[T_V/R_0]$ a pour éléments de réduction au point P :

$$[T_V/R_0] = \begin{cases}\vec{\Omega}(S/R_0)\\ \vec{V}(P\in(S)/R_0)\end{cases}_P$$

La connaissance du vecteur $\vec{\Omega}_{S/R_0}$ et de la vitesse du point $P\in S$ nous permet de savoir le torseur cinématique en tout point de S à l'aide de la relation d'antisymétrie.

1.4.4- Composition des vecteurs instantanés de rotation :

Scanned by CamScanner

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque et R_0, R_1 *et* R_2 trois repères. Notons les vecteurs instantanés des rotations : $\vec{\Omega}(R_1/R_0)$, $\vec{\Omega}(R_2/R_0)$ *et* $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$. D'après la formule de Bour on écrit :

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0} &= \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1/R_0)} \wedge \vec{u} \\ \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_1} &= \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\Omega}_{(R_2/R_1)} \wedge \vec{u}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\Omega}_{(R_2/R_1)} \wedge \vec{u} + \vec{\Omega}_{(R_1/R_0)} \wedge \vec{u}$$

$$= \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_2} + \left(\vec{\Omega}_{(R_2/R_1)} + \vec{\Omega}_{(R_1/R_0)}\right) \wedge \vec{u}$$

$$\text{Or : } \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\Omega}_{(R_2/R_0)} \wedge \vec{u}$$

$$\boxed{D'où : \vec{\Omega}_{(R_2/R_0)} = \vec{\Omega}_{(R_2/R_1)} + \vec{\Omega}_{(R_1/R_0)}}$$

On peut généraliser sur N+1 repères, on écrit :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{(R_N/R_0)} = \vec{\Omega}_{(R_N/R_{N-1})} + \ldots + \vec{\Omega}_{(R_1/R_0)}}$$

- On peut aussi montrer que : $\boxed{\vec{\Omega}(R_i/R_j) = -\vec{\Omega}(R_j/R_i)}$

1.5-Champ des accélérations

Dérivons le champ de distribution des vitesses par rapport au temps :

$$\vec{\gamma}(B\in S/R_0) = \left.\frac{d\vec{V}(B\in S/R_0)}{dt}\right|_{R_0}$$

$$= \left.\frac{d\vec{V}(A\in S/R_0)}{dt}\right|_{R_0} + \left.\frac{d\left(\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{AB}\right)}{dt}\right|_{R_0}$$

$$= \vec{\gamma}(A\in S/R_0) + \left.\frac{d\left(\vec{\Omega}_{S/R_0}\right)}{dt}\right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \left.\frac{d\left(\overrightarrow{AB}\right)}{dt}\right|_{R_0}$$

$$\boxed{\text{D'où finalement: } \vec{\gamma}(B\in S/R_0) = \vec{\gamma}(A\in S/R_0) + \left.\frac{d\left(\vec{\Omega}_{S/R_0}\right)}{dt}\right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \left(\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{AB}\right)}$$

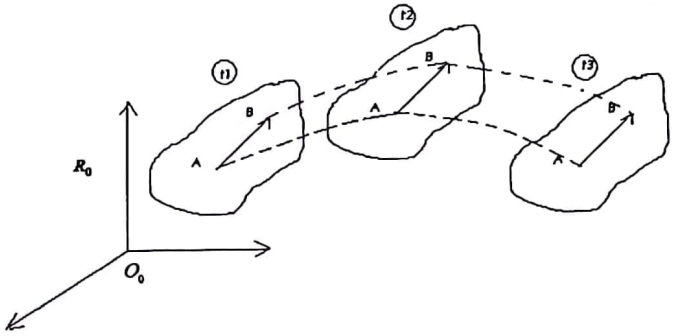
***Résultat** : Le champ des accélérations n'est pas antisymétrique, donc on ne peut pas représenter le champ des accélérations d'un solide par un torseur.*

2-Différents Mouvements d'un solide indéformable

2.1- Mouvement de translation

Scanned by CamScanner

Soient A et B deux points quelconques d'un solide (S). On dit que ce dernier est en mouvement de translation par rapport à un repère R_0 si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ reste constant en fonction du temps t dans R_0.



Par conséquent :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_0}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\frac{d\overrightarrow{AO_0}}{dt}\right)_{R_0}+\left(\frac{d\overrightarrow{O_0B}}{dt}\right)_{R_0}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{V}(B/R_0)-\vec{V}(A/R_0)=\vec{0}$$

D'où : $\vec{V}(B/R_0)=\vec{V}(A/R_0)$ *et* $\vec{\Omega}(S/R_0)=\vec{0}$

Remarques :

- Le torseur cinématique associé à un solide en mouvement de translation est un couple.
- Tous les points de (S) ont même vitesse et donc même accélération par rapport à R_0 ; cependant, cette même vitesse et cette même accélération peuvent varier en fonction du temps.
- Si la vitesse d'un point quelconque de (S) en mouvement de translation reste constante en fonction du temps. On dit que le mouvement de translation est uniforme.

2.2- Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

Un solide (S) est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ) si les points situés sur cet axe ont une vitesse nulle et le mouvement des autres points de (S) est un mouvement circulaire centré sur cet axe.

Soit (S) un solide en mouvement de rotation autour de l'axe $(O_0,\vec{z}_0)$ de R_0, la vitesse d'un point A de (S) s'écrit donc :

$$\vec{V}_{A/R_0}=\vec{\Omega}_{S/R_0}\wedge\overrightarrow{O_0A}$$

Or : $\vec{\Omega}_{S/R_0}=\dot{\varphi}\vec{z}_0$ donc :

$$\vec{V}_{A/R_0}=\vec{\Omega}_{S/R_0}\wedge\overrightarrow{O_0A}=\vec{\Omega}_{S/R_0}\wedge\overrightarrow{O_0H}+\vec{\Omega}_{S/R_0}\wedge\overrightarrow{HA}$$

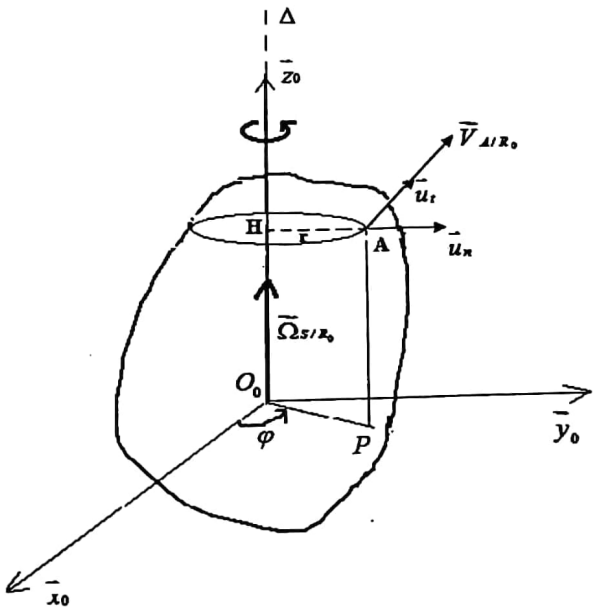
$$=\vec{\Omega}_{S/R_0}\wedge\overrightarrow{HA}$$

$$=\dot{\varphi}\vec{z}_0\wedge\overrightarrow{HA}=\dot{\varphi}\vec{z}_0\wedge HA\vec{u}_n=\dot{\varphi}HA\vec{u}_t=r\dot{\varphi}\vec{u}_t$$

$$\vec{V}_{A/R_0}=r\dot{\varphi}\vec{u}_t$$

Scanned by CamScanner

H Etant la projection de A sur $(O_0\vec{z}_0)$. $HA = r$ Est le rayon du cercle décrit par le point A.



Remarques :

- Le vecteur $\vec{\Omega}_{S/R_0}$ qu'on appelle aussi vecteur de vitesse angulaire, est parallèle à l'axe de rotation (Δ) , son orientation est donnée par la règle de tire-bouchon.
- Tous les points du solide ont même vitesse angulaire $\Omega_{S/R_0} = \dot{\varphi}$. La vitesse linéaire augmente en s'éloignant de l'axe de rotation : $V_{A/R_0} = r\dot{\varphi}$
- Dans le cas d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, le torseur cinématique se réduit à un glisseur : $[T_V] = \underset{P\in\Delta}{\begin{cases}\overrightarrow{\Omega(S/R_0)} \\ \vec{0}\end{cases}}$

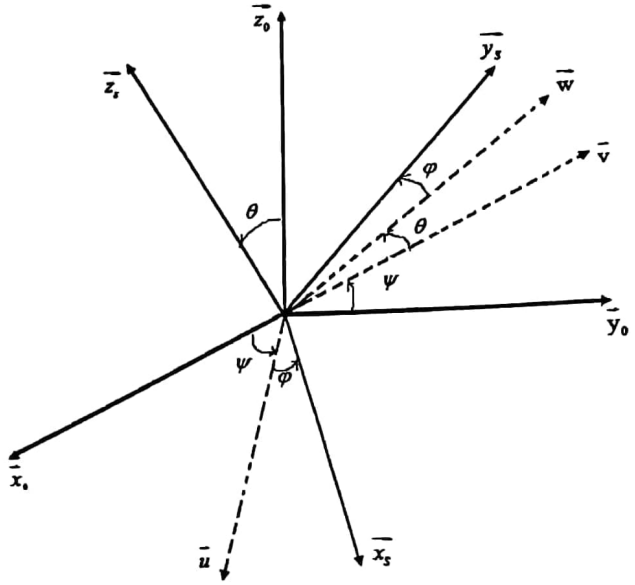
3- Paramétrage d'un solide

3.1- Mouvement d'un repère lié au solide par rapport à un repère de référence-angles d'Euler

Le passage d'un repère fixe $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ au repère lié au solide en mouvement quelconque par rapport à R_0 se fait en deux étapes :

- On passe de $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ à $R_0'(O_S,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ par l'intermédiaire d'un mouvement de translation qui est entièrement défini par la donnée des trois coordonnées de O_s dans R_0 $\left(\vec{\Omega}_{R_0'/R_0} = 0\right)$
- On déduit $R_s(O_s,\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$ de $R_0'(O_S,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ en utilisant la définition d'un mouvement de rotation autour d'un point fixe (ici O_S). Ce dernier étant déterminé par la donnée des trois angles d'Euler ψ, θ et φ :

Scanned by CamScanner



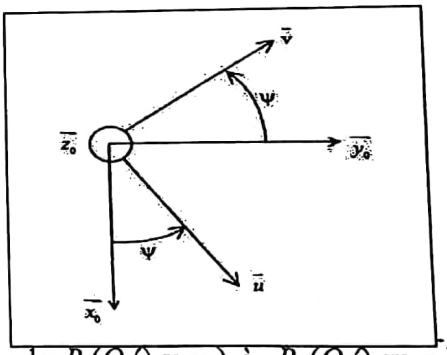
- **Angle de précession** ψ : Il permet de passer de $R_0'(O_s, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ à $R_1(O_s, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z_0})$ par une rotation autour de l'axe $(O_s, \vec{z_0})$ d'angle ψ.

  L'intersection des plans $(O_s, \vec{x_0}, \vec{y_0})$ et $(O_s, \vec{x_S}, \vec{y_S})$ est une droite. Le vecteur unitaire $\vec{u}$ du repère R_1 est porté par cette droite. Donc $\vec{u} \perp \vec{z_0}$ et $\vec{u} \perp \vec{z_s}$

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos\psi\, \vec{x_0} + \sin\psi\, \vec{y_0} \\ \vec{v} = -\sin\psi\, \vec{x_0} + \cos\psi\, \vec{y_0} \end{cases}$$

$$R_0'(O_s, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}) \xrightarrow{Rot(\vec{z_0})} R_1(O_s, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z_0})$$

$$\vec{\Omega}_{R_1/R_0'} = \dot{\psi}\, \vec{z_0}$$

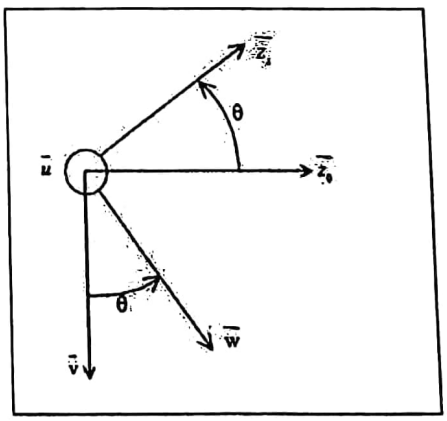


- **Angle de nutation** θ : Il permet de passer de $R_1(O_s, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z_0})$ à $R_2(O_s, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z_s})$ par une rotation autour de l'axe $(O, \vec{u})$ d'angle θ.

$$\begin{cases} \vec{w} = \cos\theta\, \vec{v} + \sin\theta\, \vec{z_0} \\ \vec{z_s} = -\sin\theta\, \vec{v} + \cos\theta\, \vec{z_0} \end{cases}$$

$$R_1(O_s, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z_0}) \xrightarrow{Rot(\vec{u})} R_2(O_s, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z_s})$$

$$\vec{\Omega}_{R_2/R_1} = \dot{\theta}\, \vec{u}$$



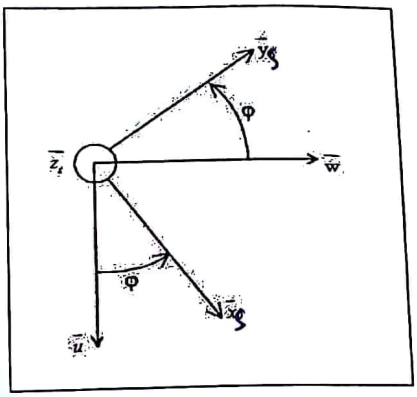
Scanned by CamScanner

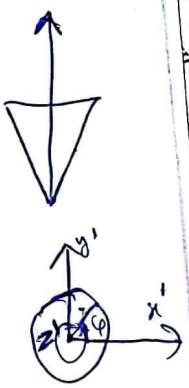
- **Angle de rotation propre** φ : Il permet d'arriver à $R_s(O_s, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ à partir de $R_2(O_s, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_s)$ par une rotation autour de l'axe $(O, \vec{z}_s)$ d'angle φ.

$$\begin{cases} \vec{x}_s = \cos\varphi\,\vec{u} + \sin\varphi\,\vec{w} \\ \vec{y}_s = -\sin\varphi\,\vec{u} + \cos\varphi\,\vec{w} \end{cases}$$

$$R_2(O_s, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_s) \xrightarrow{Rot(\vec{z}_s)} R_s(O_s, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$$

$$\vec{\Omega}_{R_s/R_2} = \dot{\varphi}\,\vec{z}_s$$





Conclusion : Le vecteur de rotation instantané du solide (S) par rapport R_0 est :

$$\vec{\Omega}_{S/R_0} = \vec{\Omega}_{R_s/R_0} = \vec{\Omega}_{R_s/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_0'} + \vec{\Omega}_{R_0'/R_0}$$

$$\boxed{\vec{\Omega}_{S/R_0} = \dot{\psi}\,\vec{z}_0 + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}\,\vec{z}_s}$$

Ce vecteur s'écrit différemment suivant qu'il est exprimé sur R_0 ou sur R_s :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{S/R_0} = \left(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\right)\vec{x}_0 + \left(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi\right)\vec{y}_0 + \left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)\vec{z}_0}$$

Ou :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{S/R_0} = \left(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi\right)\vec{x}_s + \left(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi\right)\vec{y}_s + \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta\right)\vec{z}_s}$$

3.2-Paramètres de position

- Un solide (S) pouvant se mouvoir librement a sa position déterminée par la donnée de six paramètres : trois coordonnées de la position d'un point du solide (S) (Les trois coordonnées du centre d'inertie par exemple) et trois angles pour définir l'orientation de S qui, dans le cas général, sont les trois angles d'Euler.

- Le nombre de degrés de liberté d'un solide est le nombre de paramètres primitifs indépendants, ce nombre est égal au nombre de paramètres de position du solide (= 6) diminué du nombre des relations existantes entre paramètres primitifs, leurs dérivés et le temps (= nombre d'équations de liaison)

Scanned by CamScanner

Exemples :

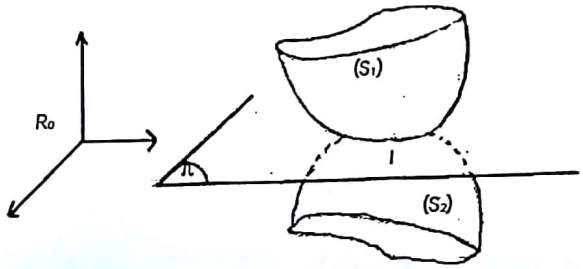
- Solide en rotation autour d'un axe fixe : nombre de degrés de liberté =1, son mouvement peut être décrit en fonction de l'angle ψ par exemple.
- Solide en rotation autour d'un point fixe: nombre de degrés de liberté =3, Son mouvement peut être décrit seulement en fonction des angles d'Euler : ψ , θ et φ
- Un pendule simple est un système à 1 degré de liberté son mouvement peut être décrit en fonction d'un angle.

4 - Cinématique de contact

4.1-Vitesse de glissement

Considérons deux solides S_1 et S_2 en mouvement par rapport à un référentiel R_0 de telle sorte que leurs surfaces en contact. Pour simplifier, supposons que le contact soit ponctuel (voir Figure) Nous devons distinguer au contact de S_1 et S_2 trois points :

- Le point géométrique I de contact.
- Le point I_1 du solide S_1 qui coïncide avec I au même instant.
- Le point I_2 du solide S_2 qui coïncide avec I au même instant.



Par définition, on appelle vitesse de glissement de S_1 sur S_2 , notée $\vec{V}_g$, la vitesse de I_1 par rapport à S_2 : $\boxed{\vec{V}_g(S_1/S_2)=\vec{V}_{I_1/S_2}=\vec{V}(I_1\in S_1/R_0)-\vec{V}(I_2\in S_2/R_0)}$

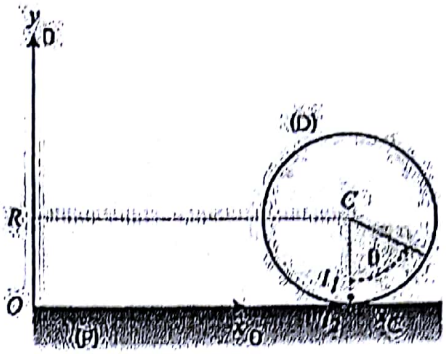
Remarques :

- La vitesse de glissement ne dépend que des solides en contact ; elle est donc indépendante du référentiel par rapport auquel S_1 et S_2 sont en mouvement.
- La vitesse de glissement est contenue dans le plan tangent π commun à S_1 et S_2 . Sinon, il y aurait éloignement des solides ou pénétration de l'un dans l'autre.
- Dans le cas où Il n'y a pas de glissement on a : $\vec{V}_g=\vec{0}$.
- Si le solide S_2 est fixe par rapport à R_0 $\left(\vec{V}(I_2\in S_2/R_0)=\vec{0}\right)$, l'absence de glissement se traduit par : $\vec{V}(I_1\in S_1/R_0)=0$

Application 2:

Soit un disque vertical (D) dans un mouvement rectiligne sur l'axe $\left(O,\vec{x}_0\right)$ d'un plan (P) . On désigne par R_0 le référentiel lié au plan (voir figure).

Scanned by CamScanner



Par définition on a :

$$\vec{V}_g(D/P)=\vec{V}(I_1\in D/R_0)-\vec{V}(I_2\in P/R_0)$$

Le plan P est fixe par rapport à R_0 donc : $\vec{V}(I_2\in P/R_0)=\vec{0}$

La vitesse de glissement se réduit à : $\vec{V}_g(D/P)=\vec{V}(I_1\in D/R_0)$

Les points et appartiennent au même solide, donc d'après la distribution des vitesses on a :

$$\vec{V}_g(D/P)=\vec{V}(I_1\in D/R_0)=\vec{V}(C\in D/R_0)+\vec{\Omega}_{(D/R_0)}\wedge\overrightarrow{CI_1}$$

$$\vec{V}(C\in D/R_0)=\dot{x}_c\,\vec{x}_0$$

On a : $\left.\begin{array}{l}\vec{\Omega}_{(D/R_0)}=\dot{\theta}\,\vec{z}_0\\ \overrightarrow{CI_1}=-R\vec{y}_0\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{\Omega}_{(D/R_0)}\wedge\overrightarrow{CI_1}=R\dot{\theta}\,\vec{x}_0$

D'où : $\boxed{\vec{V}_g(D/P)=\left(\dot{x}_C+R\,\dot{\theta}\right)\vec{x}_0}$

➢ Dans le cas du roulement sans glissement : $\vec{V}_g(D/P)=\vec{0}$ d'où : $\left(\dot{x}_C+R\dot{\theta}\right)=0$

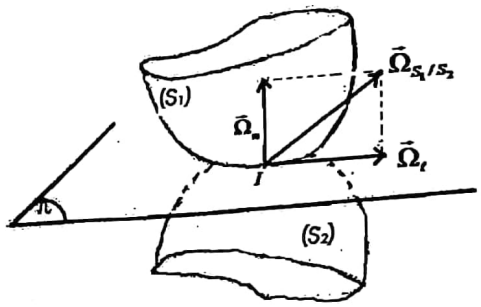
Par intégration on obtient : $\Delta x_C=-R.\Delta\theta$, ce qui exprime l'égalité des longueurs parcourues par le point géométrique I sur le disque et sur le plan. Le signe (-) traduit seulement la diminution de θ lorsque x_C augmente.

4.2- Roulement avec pivotement

La vitesse d'un point quelconque M de S_1 par rapport au solide S_2 s'écrit :

$$\vec{V}(M\in S_1/S_2)=\vec{V}(I_1\in S_1/S_2)+\vec{\Omega}_{S_1/S_2}\wedge\overrightarrow{I_1M}=\vec{V}_g(S_1/S_2)+\vec{\Omega}_{S_1/S_2}\wedge\overrightarrow{I_1M}$$

Scanned by CamScanner

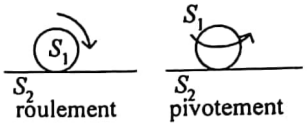


Le vecteur $\vec{\Omega}_{S_1/S_2}$ peut être considéré comme la somme :

$$\vec{\Omega}_{S_1/S_2} = \vec{\Omega}_t + \vec{\Omega}_n$$

$\vec{\Omega}_n$: vitesse angulaire de pivotement $\vec{\Omega}_N \perp \pi$

$\vec{\Omega}_t$: vitesse angulaire de roulement $\vec{\Omega}_T \in \pi$



Scanned by CamScanner

Chapitre 3 :

Géométrie des masses

Nous nous proposons de déterminer le centre d'inertie des systèmes matériels quelconques, déformables ou non, ainsi que la répartition géométrique des masses de ces systèmes afin de préparer les concepts cinétiques et dynamiques qui leur sont associés.

1- Centre d'inertie d'un système matériel

1.1-Définition du centre d'inertie

On appelle centre d'inertie ou centre de masse G d'un système matériel (Σ), le barycentre des différents points de (Σ) affectés de leurs masses respectives. Le point G est donc défini comme suit :

- Si le système matériel (Σ) est discret :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0} \qquad \text{ou:} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OP_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OP_i}}{M}$$

Où O est une origine quelconque et M est la masse totale du système.

- Si le système matériel (Σ) est continu :

$$\int_{P\in\Sigma} \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0} \qquad \text{ou :} \quad \frac{\int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{OP}\, dm}{M = \int dm} = \overrightarrow{OG}$$

Selon le type de distribution de masse on écrit l'expression de l'élément de masse dm :

- $dm = \lambda\, dl$: Pour une distribution linéique (λ : Densité linéique de la masse en P)
- $dm = \sigma\, dS$: Pour une distribution surfacique (σ : Densité surfacique de la masse en P).
- $dm = \rho\, dV$: Pour une distribution volumique (ρ : Densité volumique de la masse en P).

Les coordonnées du centre d'inertie G d'un système matériel (Σ) relativement au repère orthonormé direct fixe $R_0(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ associé aux coordonnés cartésiens x, y, z sont :

$$x_G = \frac{\int_{P\in(\Sigma)} x.dm}{M},\ y_G = \frac{\int_{P\in(\Sigma)} y.dm}{M},\ z_G = \frac{\int_{P\in(\Sigma)} z.dm}{M}$$

Pour une distribution continue

On a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{OP}\, dm}{M} = \frac{\int_{P\in\Sigma} x_P\, dm}{M}\vec{i} + \frac{\int_{P\in\Sigma} y\, dm}{M}\vec{j} + \frac{\int_{P\in\Sigma} z_P\, dm}{M}\vec{k}$$

$$= x(P)\vec{i} + y(P)\vec{j} + z(P)\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OG} = x_G\vec{i} + y_G\vec{j} + z_G\vec{k}.$$

Scanned by CamScanner

1.2- Propriétés du centre d'inertie

1.2.1- Associativité

Soit (Σ) un système formé de N sous-systèmes (Σ_i) deux à deux disjoints de masse m_i, alors le centre d'inertie G de (Σ) est le barycentre des centres d'inertie G_i de (Σ_i) affecté de la masse m_i :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OG_i}}{M} \quad \text{Avec : } M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

1.2.2- Symétrie matérielle

On dit qu'un système possède un élément de symétrie matériel (point, droite ou plan) si la distribution de masse en tout point P est égale à celle en P' point symétrique de P par rapport à cet élément de symétrie.

Si un solide homogène possède un élément de symétrie, alors le centre d'inertie G appartient à cet élément

Exemples :

- Une Boule ou un cube : le centre d'inertie coïncide avec son centre.
- Un Cylindre ou cône de révolution : le centre d'inertie appartient à leurs axes de. Révolution

Applications :

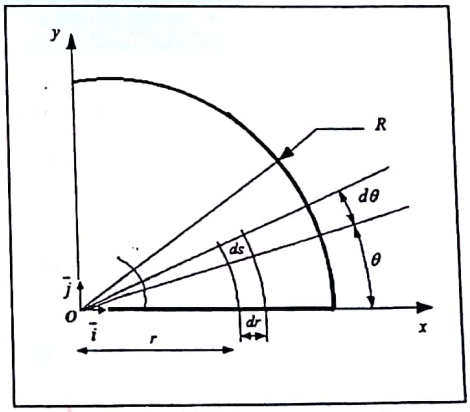
- ***Centre d'inertie d'un quart de disque :***

Soit D un quart de disque de rayon R et de masse M , on a :

$$\overrightarrow{OG} = x_G\vec{i} + y_G\vec{j} = \frac{\int_{P\in(D)} \overrightarrow{OP}.dm}{\int dm} = \frac{\iint (x\vec{i} + y\vec{j})\sigma dS}{M} = \frac{\iint x.\sigma dS}{M}\vec{i} + \frac{\iint y\sigma dS}{M}\vec{j}$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{\iint x.\sigma dS}{M} \text{ et } y_G = \frac{\iint y\sigma dS}{M} \text{ avec : } M = \sigma\frac{\pi R^2}{4}$$

en coordonnées polaires: $x = r.\cos\theta$, $y = r.\sin\theta$ et $dS = r.dr.d\theta$



$$x_G = \frac{\iint \sigma r\cos\theta.rdr.d\theta}{M} = \frac{\sigma\int_0^R r^2dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta}{\sigma\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi}$$

$$\text{et } y_G = \frac{\iint y\sigma dS}{M} = \frac{\sigma\int_0^R r^2dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta}{\sigma\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi}$$

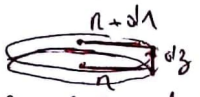
Pour des raisons de symétrie le point G est situé sur la 1ière bissectrice avec une distance

$$OG = \sqrt{x_G{}^2 + y_G{}^2} = \frac{4\sqrt{2}R}{3\pi}$$

- ***Centre d'inertie d'un cône plein :***

Scanned by CamScanner

Soit un cône de révolution plein et homogène d'axe $(O,\vec{z})$ de masse M et de hauteur h de demi-angle au sommet α. Le centre d'inertie G est situé sur l'axe de symétrie $(O,\vec{z})$.

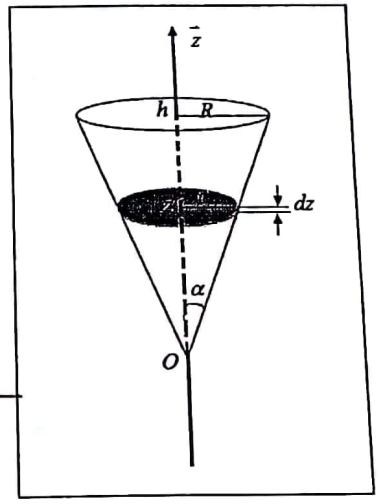


$$z_G = \frac{\int_V z.\rho dV}{M} \quad \text{Avec : } M = \int_V \rho dV$$

On a : $\tan\alpha = \frac{r}{z} = \frac{R}{h} \Leftrightarrow z = r.\frac{h}{R} \Rightarrow dz = \frac{h}{R}dr$

Or : $dV = \pi r^2 \frac{h}{R}dr = \frac{\pi h}{R}r^2 dr$

Donc: $M = \int_0^R \rho \frac{\pi h}{R} r^2 dr = \rho\frac{\pi h R^2}{3}$



On a aussi :

$$\int_V z.\rho dV = \int_0^R \rho\pi r^3 \frac{h^2}{R^2}dr = \rho\pi\frac{h^2}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{\rho\pi R^2 h^2}{4}$$

D'où : $z_G = \frac{3h}{4}$

2-Moments d'inertie

Le moment d'inertie est un scalaire qui caractérise la géométrie des masses d'un solide, il caractérise la répartition de la masse d'un solide autour d'un point, d'un axe ou d'un plan.

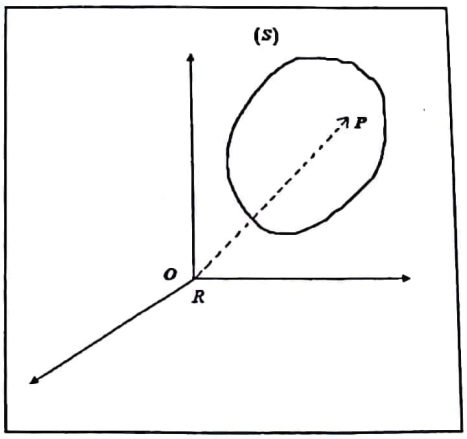
2.1- Définitions :

Soit (S) un solide repéré par rapport au référentiel $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et P un point quelconque appartenant à (S).

- **Moment d'inertie par rapport à un point :**

Le moment d'inertie de (S) par rapport à un point O est défini par:

$$I_0(S) = \int_{(S)} \left\|\overrightarrow{OP}\right\|^2 dm$$

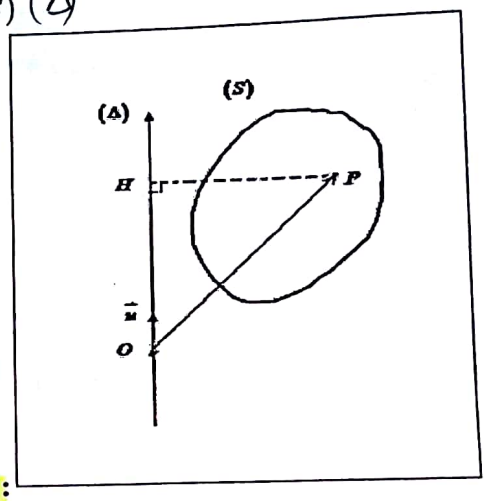


Scanned by CamScanner

- **Moment d'inertie par rapport à un axe :**

Le moment d'inertie de (S) par rapport à un axe (Δ) passant par le point O et dont $\vec{u}$ est la directrice, est définie par: $I_{\Delta}(S) = \int_{(S)} \left\|\overrightarrow{HP}\right\|^2 dm$

H Etant la projection orthogonale du point P sur (S) (Δ)



Or :

$$\left\|\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| . \left\|\vec{u}\right\| . \sin(\widehat{\overrightarrow{OP}, \vec{u}})$$

$$= \left\|\overrightarrow{OP}\right\| . \sin(\widehat{\overrightarrow{OP}, \vec{u}})$$

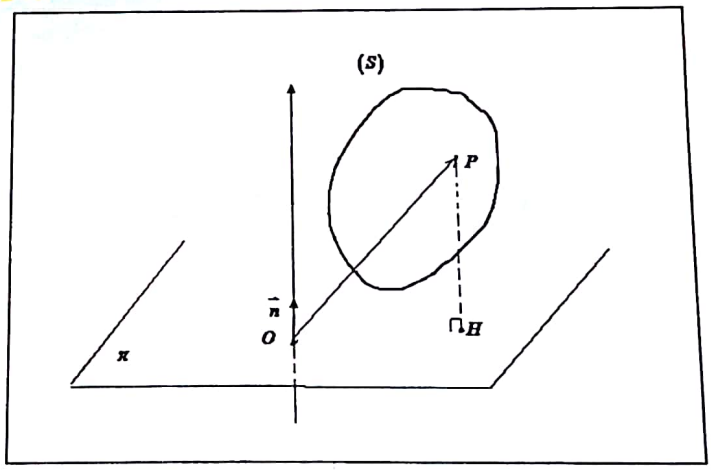
$$= \left\|\overrightarrow{HP}\right\|$$

On écrit aussi : $I_{\Delta}(S) = \int_{(S)} \left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}\right)^2 dm$

- **Moment d'inertie par rapport à un plan :**

Le moment d'inertie de (S) par rapport à un plan π contenant le point O et dont la normale est $\vec{n}$ est défini par:

$$I_{\pi}(S) = \int_{(S)} \left\|\overrightarrow{HP}\right\|^2 dm = \int_{(S)} \left(\overrightarrow{OP}.\vec{n}\right)^2 dm$$



2.2- Signification physique

Le moment d'inertie est une grandeur qui quantifie la résistance à une mise en rotation d'un solide. Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe traduit l'aptitude de ce solide à tourner autour de cet axe.

- Plus le moment d'inertie est grand, plus le solide a du mal à tourner autour de l'axe.
- Plus l'axe s'éloigne du centre de gravité, plus le moment d'inertie est grand.

Scanned by CamScanner

3- Opérateur d'inertie et matrice d'inertie

- L'opérateur d'inertie ou tenseur d'inertie d'un solide (S), en un point O, est l'opérateur linéaire qui à tout vecteur $\vec{u}$ fait correspondre le vecteur $\vec{I}_O(S,\vec{u})$ tel que :

$$\vec{I}_O(S,\vec{u}) = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right) dm = \left[\mathcal{I}(O,S)\right]\left[\vec{u}\right]$$

- On peut montrer que l'opérateur d'inertie s'écrit sous forme d'une matrice symétrique $[I(O,S)]$ appelée matrice d'inertie en un point O relativement à une base

$$\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right): [I(O,S)] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Avec :

$$A = I_{xx} = \int_{(S)} (y^2+z^2)dm; \quad B = I_{yy} = \int_{(S)} (x^2+z^2)dm; \quad C = I_{zz} = \int_{(S)} (x^2+y^2)dm$$

$$D = I_{yz} = \int_{(S)} yzdm; \quad E = I_{xz} = \int_{(S)} xzdm; \quad F = I_{xy} = \int_{(S)} xydm$$

- Les éléments : A, B et C sont des moment d'inertie et les éléments : D, E et F sont des produits d'inertie.

Remarques :

- La matrice d'inertie d'un solide (S) dépend du point et de la base où on la calcule.
- On peut aboutir au moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un axe (Δ) passant par le point O et dont $\vec{u}$ est la directrice à partir de la matrice d'inertie :

$$I_\Delta(S) = \vec{u}.\vec{I}_O(S,\vec{u}) = {}^T\left[\vec{u}\right].[I(O,S)].\left[\vec{u}\right]$$

$\vec{z}$

$$I_\Delta(S) = {}^T\left[\vec{z}\right].[I(O,S)].\left[\vec{z}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -E \\ -D \\ C \end{pmatrix} = C$$

4- Base principale d'inertie

La matrice d'inertie de (S) en O par rapport la base $\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$ est réelle et symétrique, donc elle est diagonalisable. Il est possible de trouver par changement de base, une base orthonormée $(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$ de IR^3 où la matrice d'inertie prend une forme diagonale :

$$[I(O,S)] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})}$$

Scanned by CamScanner

La base $(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$ est la base principale d'inertie, Les axes de cette base sont les axes principaux d'inertie, la matrice diagonale $[I(O,S)]$ est la matrice principale d'inertie et les termes diagonaux λ_1, λ_2 et λ_3 les moments principaux d'inertie.

5- Axes principaux d'inertie

5.1- Détermination des axes principaux d'inertie

Pour déterminer les axes principaux d'inertie d'un solide, on se base sur les propriétés suivantes :

- ✓ Tout axe perpendiculaire à un plan de symétrie matérielle est axe principal d'inertie.
- ✓ Tout axe de symétrie matérielle est axe principale d'inertie.
- ✓ Si un solide possède un axe de symétrie de révolution, alors toute base contenant cet axe est une base principale de symétrie.
- ✓ Tout repère orthonormé dont deux de ces plans sont des plans de symétrie matérielle pour un solide, est un repère principal d'inertie de ce solide.
- ✓ Tout repère orthonormé dont deux de ses axes sont axes de symétrie matérielle pour un solide, est repère principal d'inertie de ce solide.

5.2- Méthodes de calcul des moments d'inertie

Si un solide possède un axe de révolution $(O,\vec{Z})$ (un cylindre, un cône), le repère $(O,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$ est donc un repère principal d'inertie

Les axes $(O,\vec{X})$ et $(O,\vec{Y})$ jouent le même rôle du point de vue géométrique et du point de vue de répartition de la masse, par conséquent les moments d'inertie λ_1 et λ_2 sont égaux.

La matrice principale d'inertie en O dans la base $(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$ s'écrit :

$$[I(O,S)]=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})} \qquad avec : \lambda=\lambda_1=\lambda_2$$

Dans ce cas on calcule aisément les moments principaux d'inertie λ_1 , λ_2 et λ_3 en remarquant que :

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= \int_{(S)}(Y^2+Z^2)dm\\ \lambda_2 &= \int_{(S)}(X^2+Z^2)dm\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_1+\lambda_2=\int_{(S)}(X^2+Y^2+2Z^2)dm=\lambda_3+2\int_{(S)}Z^2dm$$

Or : $\lambda_1=\lambda_2$ donc : $\boxed{\lambda=\frac{\lambda_3}{2}+\int_{(S)}Z^2dm=\frac{\lambda_3}{2}+I_{(O,X,Y)}}$

$I_{(O,X,Y)}$: Est le moment d'inertie du système par rapport au plan $(O,\vec{X},\vec{Y})$.

- Si un solide possède une symétrie sphérique (une boule par exemple) la matrice principale d'inertie s'écrit dans le repère $(O,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$:

Scanned by CamScanner

$$[I(O,S)]=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}_{(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z})} \qquad (\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3)$$

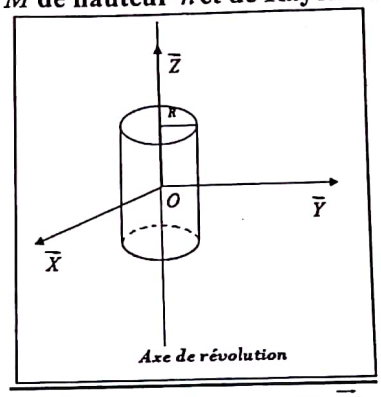
Dans ce cas on calcule les moments principaux d'inertie en remarquant que :

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\int_{(S)}(X^2+Y^2+Z^2)dm=2I_O(S)$$

Or : $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ donc : $\lambda=\frac{2}{3}I_O$

I_O : Est le moment d'inertie du système par rapport au point O

Exemple 1 : Détermination de la matrice principale d'inertie d'un cylindre plein (C) ***de centre*** O ***masse*** M **de hauteur** h **et de Rayon** R **:**



Le système étudié a une symétrie cylindrique. L'axe $(O,\overline{Z})$ étant un axe de révolution. La matrice d'inertie s'écrit dans le repère $(O,\overline{X},\overline{Y},\overline{Z})$ sous la forme :

$$[I(O,S)]=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}_{(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z})} \qquad (\lambda=\lambda_1=\lambda_2)$$

On commence par la détermination du moment d'inertie λ_3, puis on calcule le moment d'inertie $I_{(O,X,Y)}$ et on déduit les moments principaux d'inertie λ_1 et λ_2 :

Exprimons X, Y et Z et dV en coordonnées cylindriques : $\begin{cases}X=r\cos\varphi\\ Y=r\sin\varphi\\ Z\end{cases}$ *et* : $dV=rdrd\varphi dZ$

On a : $M=\iiint\rho.dV=\rho\int_0^R dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-h/2}^{h/2}dZ=\rho\pi R^2h$

Donc : $\rho=\frac{M}{\pi R^2h}$

Scanned by CamScanner

$$\text{Et : } \lambda_3 = \iiint_V (X^2+Y^2)\rho dV = \rho\int_0^R r^3 dr\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{-h/2}^{h/2} dZ = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 h = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I_{(O,X,Y)} = \iiint_V Z^2\rho dV = \rho\int_0^R r dr\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{-h/2}^{h/2} Z^2 dZ = \frac{1}{12}\rho\pi R^2 h^3 = \frac{1}{12}Mh^2$$

$$\text{D'où : } \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)+\frac{1}{12}Mh^2 = \left(\frac{1}{4}MR^2+\frac{1}{12}Mh^2\right)$$

La matrice principale d'inertie du cylindre plein dans le repère $(O,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$ est :

$$[I(O,S)] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{4}MR^2+\frac{1}{12}Mh^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}MR^2+\frac{1}{12}Mh^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR^2 \end{bmatrix}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})}$$

Remarque :

- On peut déduire la matrice principale d'inertie d'une tige de longueur $2L$ et de diamètre d , calculée en son centre O, en prenant dans la matrice précédente : $h = 2L$ et $R = d/2$. Si la tige est filiforme, on prend $d = 0$.
- De même on peut déduire la matrice principale d'inertie d'un disque de rayon R et d'épaisseur e , calculée en son centre O, en prenant dans la matrice principale d'inertie du cylindre : $h = e$ .Si le disque est de section négligeable on prend : $h = e = 0$.

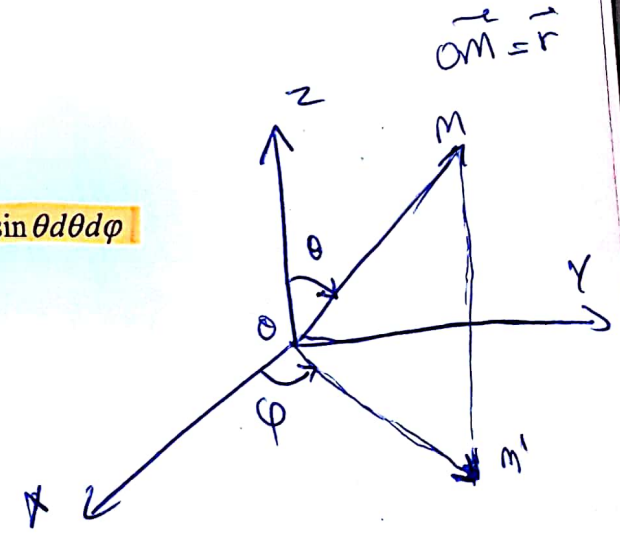
Exemple 2 : Détermination de la matrice principale d'inertie d'une sphère pleine (C) ***de masse*** M **et de Rayon** R **:**

Le système étudié a une symétrie sphérique. La matrice d'inertie s'écrit dans le repère $(O,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$ sous la forme :

$$[I(O,S)] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})}$$

Exprimons X, Y et Z et dV en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} X = r\sin\theta\cos\varphi \\ Y = r\sin\theta\sin\varphi \\ Z = r\cos\theta \end{cases} \quad \text{et : } dV = r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi$$



Scanned by CamScanner

On a : $M=\iiint \rho.dV=\rho\int_0^R rdr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=\frac{4}{3}\pi R^3.\rho$ Donc : $\rho=\frac{3}{4}\frac{M}{\pi R^3}$

Et : $I_O=\int_{(S)}\left(X^2+Y^2+Z^2\right)dm=\iiint r^2dm=\rho\iiint r^2dV=\rho\int_0^R r^4dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=\frac{4}{5}\pi\rho R^5$

Donc : $I_O=\frac{3}{5}MR^2$

$$\boxed{D'où : \lambda=\frac{2}{3}I_O=\frac{2}{5}MR^2}$$

La matrice principale d'inertie de la sphère pleine dans le repère $(O,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$ est :

$$[I(O,S)]=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}MR^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{5}MR^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{5}MR^2\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

6- Théorème de König pour le moment d'inertie - Théorème d'Huygens

Etudions l'influence d'une translation des axes en considérant le repère initial $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et le nouveau repère $(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ dit repère barycentrique dont l'origine coïncide avec le centre d'inertie G du solide (S). En désignant par (a,b,c) les coordonnées de G dans $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, il vient :

➢ ***1ier Résultat :*** **Théorème de König pour le moment d'inertie**

$$\boxed{\vec{I}_O(S,\vec{u})=\vec{I}_G(S,\vec{u})+M.\overrightarrow{OG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OG}\right)}$$

L'écriture matricielle de ce théorème est :

$$\boxed{[I(O,S)][\vec{u}] = [I(G,S)][\vec{u}] + [I(O,G\{M\})][\vec{u}]}$$

D'où :

$$\boxed{[I(O,S)] = [I(G,S)] + [I(O,G\{M\})]}$$

$$\begin{bmatrix}A & -F & -E\\ -F & B & -D\\ -E & -D & C\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}=\begin{bmatrix}A_G & -F_G & -E_G\\ -F_G & B_G & -D_G\\ -E_G & -D_G & C_G\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}+M\begin{bmatrix}b^2+c^2 & -ab & -ac\\ -ab & a^2+c^2 & -bc\\ -ac & -bc & a^2+b^2\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$[I(O,S)]$: Est La matrice d'inertie par rapport au point O du solide (S).

$[I(G,S)]$: Est la matrice d'inertie par rapport au point G du solide (S).

$[I(O,G\{M\})]$: Est la matrice d'inertie par rapport au point O du centre d'inertie G en lequel on suppose que toute la masse M de (S) est concentrée.

Inertie = Masse + Géométrie

Scanned by CamScanner

En effet :

$$\vec{I}_O(S,\vec{u}) = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right)dm = \int_{P\in(S)} \left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GP}\right)\wedge\left(\vec{u}\wedge\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GP}\right)\right)dm$$

En développant on aura :

$$\int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right)dm = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OG}\right)dm + \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GP}\right)dm + \int_{P\in(S)} \overrightarrow{GP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OG}\right)dm + \int_{P\in(S)} \overrightarrow{GP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GP}\right)dm.$$

Or:

$$\begin{cases} \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GP}\right)dm = \overrightarrow{OG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\int_{P\in(S)}\overrightarrow{GP}dm\right) = \vec{0} \quad \left(car: \int_{P\in(S)}\overrightarrow{GP}dm = \vec{0}\right) \\ \left(\int_{P\in(S)}\overrightarrow{GP}dm\right)\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OG}\right) = \vec{0} \\ \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OG}\right)dm = M.\overrightarrow{OG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OG}\right) \\ \int_{P\in(S)} \overrightarrow{GP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GP}\right)dm = I_G(S,\vec{u}) \end{cases}$$

$\overrightarrow{OG} = \frac{\int_{P\in(S)}\overrightarrow{OP}\,dm}{m}$; $G = O$; $\overrightarrow{GG} = \frac{\int_{P\in(S)}\overrightarrow{GP}\,dm}{m} = \vec{0}$; $\int_{P\in(S)}\overrightarrow{GP}dm = \vec{0}$.

D'où : $\boxed{\vec{I}_O(S,\vec{u}) = \vec{I}_G(S,\vec{u}) + M.\overrightarrow{OG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OG}\right)}$

➢ ***2ème Résultat :*** **Théorème d'Huygens**

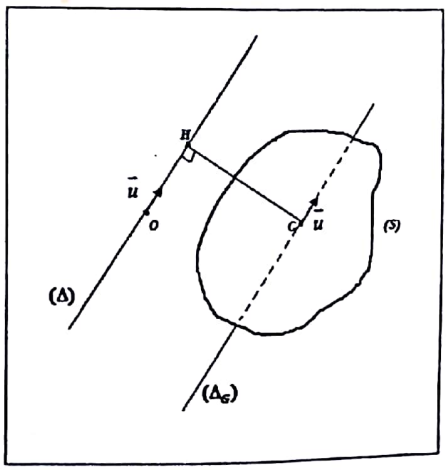
$$\boxed{I_\Delta(S) = I_{\Delta_G}(S) + Md^2}$$

$(\Delta)\,//\,(\Delta_G)$ // suivant $\vec{u}$

$I_\Delta(S)$ Etant le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe (Δ) passant par le point O.

$I_{\Delta_G}(S)$ Etant le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe Δ_G parallèle à Δ et passant par G.

d Etant la distance entre les deux axes Δ et Δ_G



En effet :

$$\vec{u}.\vec{I}_O(S,\vec{u}) = \vec{u}.\left(\vec{I}_G(S,\vec{u})\right) + \vec{u}.\left(M.\overrightarrow{OG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OG}\right)\right).$$

On a :

$$\vec{u}.\left(\vec{I}_O(S,\vec{u})\right) = I_\Delta(S)$$

$$\vec{u}.\left(\vec{I}_G(S,\vec{u})\right) = I_{\Delta_G}(S)$$

Et :

Scanned by CamScanner

$$\vec{u}.\left(M.\overrightarrow{OG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OG}\right)\right)=M\vec{u}.\left[\left(\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OG}\right)\vec{u}-\left(\overrightarrow{OG}.\vec{u}\right).\overrightarrow{OG}\right]$$

$$=M\left[\left\|\overrightarrow{OG}\right\|^2-\left(\overrightarrow{OG}.\vec{u}\right)^2\right]$$

$$=M\left[\left\|\overrightarrow{OG}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{OH}\right\|^2\right]$$

$$=Md^2$$

D'où : $\boxed{I_\Delta(S)=I_{\Delta_G}(S)+Md^2}$

Scanned by CamScanner

Chapitre 4:

Cinétique

Soit un système matériel (Σ) en mouvement par rapport à un repère $R_0(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$. On se propose d'étudier dans ce chapitre :

- Le torseur cinétique $[T_C/R_0]$ ou torseur des quantités de mouvement.
- Le torseur dynamique $[T_D/R_0]$ ou torseur des quantités d'accélération.
- L'énergie cinétique $E_C((\Sigma)/R_0)$.

1- Torseur cinétique

1.1-Définition

- Le torseur cinétique de (Σ) par rapport R_0 c'est un torseur dont les éléments de réduction en un point A quelconque de l'espace sont donnés par :

$$[T_C/R_0]=\begin{cases}\vec{R}_C=\int_{P\in(\Sigma)}\vec{V}(P/R_0)dm \\ \vec{\sigma}_A(\Sigma/R_0)=\int_{P\in(\Sigma)}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R_0)dm\end{cases}_A$$

Avec : $\vec{R}_C$ la résultante cinétique de (Σ) dans son mouvement par rapport à R_0.

et $\vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_0)$ le moment cinétique de (Σ) en A dans son mouvement par rapport à R_0.

- On démontre que : $\boxed{\vec{R}_C=M.\vec{V}_{G/R_0}}$ avec M la masse totale du système matériel (Σ).

En effet : $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\int_{P\in(\Sigma)}\overrightarrow{OP}.dm}{M}\Leftrightarrow M\overrightarrow{OG}=\int_{P\in(\Sigma)}\overrightarrow{OP}.dm$

Comme : $\dfrac{d}{dt}\left[M\overrightarrow{OG}\right]_{R_0}=\dfrac{d}{dt}\left(\int_{P\in(\Sigma)}\overrightarrow{OP}.dm\right)_{R_0}\Leftrightarrow M\dfrac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OG}\right]_{R_0}=\int_{P\in(\Sigma)}\left(\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{R_0}.dm$

Donc : $M.\vec{V}_{G/R_0}=\int_{P\in(\Sigma)}\vec{V}(P/R_0).dm$

D'où finalement: $\boxed{\vec{R}_C=M.\vec{V}_{G/R_0}}$

- Soit A et B deux points quelconques de l'espace. On démontre que :

$$\boxed{\vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_0)=\vec{\sigma}_B((\Sigma)/R_0)+M\vec{V}_{G/R_0}\wedge\overrightarrow{BA}}$$

Scanned by CamScanner

En effet :

$$\vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_0) = \int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R_0)dm = \int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}(P/R_0)dm + \int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{BP} \wedge \vec{V}(P/R_0)dm$$

Comme : $$\int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}(P/R_0)dm = \overrightarrow{AB} \wedge \int_{P\in(\Sigma)} \vec{V}(P/R_0)dm = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_C = \vec{R}_C \wedge \overrightarrow{BA}$$

Et : $$\int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{BP} \wedge \vec{V}(P/R_0)dm = \vec{\sigma}_B((\Sigma)/R_0)$$

D'où : $$\vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_0) = \vec{\sigma}_B((\Sigma)/R_0) + \vec{R}_C \wedge \overrightarrow{BA} = \vec{\sigma}_B((\Sigma)/R_0) + M\vec{V}_{G/R_0} \wedge \overrightarrow{BA}$$

Cette formule, dans laquelle A et B deux points quelconques de l'espace, permet de calculer le moment cinétique d'un système (Σ), par rapport à un repère R_0, en tout point si on le connaît en un point donné.

Remarque :

Dans le cas particulier où $B = G$ on obtient le théorème de König relatif au moment cinétique :

$$\boxed{\vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_0) = \vec{\sigma}_G((\Sigma)/R_0) + M\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G/R_0)}$$

Cela montre que le moment cinétique d'un système matériel Σ en un point A par rapport à R_0 est égal au moment cinétique de ce système en G, augmenté du terme $M\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G/R_0)$, moment cinétique au point A qu'aurait une masse ponctuelle M concentrée en G.

1.2-Détermination du moment cinétique d'un solide (S) en l'un de ses points :

Soit A un point du solide (S) de masse M et de tenseur d'inertie $[I(A,S)]$ en A. On montre que le moment cinétique en A s'écrit :

$$\boxed{\vec{\sigma}_A((S)/R_0) = M\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/R_0) + [I(A,S)]\left[\vec{\Omega}(S/R_0)\right]}$$

$\Rightarrow \vec{I}_A(S, \vec{\Omega}_{(S/R_0)})$

En effet :

$$\vec{\sigma}_A((S)/R_0) = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R_0)dm$$

$$= \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{AP}\right)dm$$

$$= \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(A/R_0)dm + \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{AP}\right)dm$$

$$= \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(A/R_0)dm + \vec{I}_A(S, \vec{\Omega}_{S/R_0})$$

$$= \left(\int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP}dm\right) \wedge \vec{V}(A/R_0) + [I(A,(S))]\left[\vec{\Omega}_{S/R_0}\right]$$

D'où finalement : $$\boxed{\vec{\sigma}_A((S)/R_0) = M\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/R_0) + [I(A,(S))]\left[\vec{\Omega}_{S/R_0}\right]}$$

Cas particuliers importants :

- Si le point A de (S) est fixe dans R_0 : c'est à dire : $\vec{V}(A/R_0) = \vec{0}$

Scanned by CamScanner

On a : $\vec{\sigma}_A(S/R_0) = [I(A,(S))]\left[\vec{\Omega}_{S/R_0}\right]$

- Si le point A coïncide avec le centre d'inertie G on a :

$$\vec{\sigma}_G(S/R_0) = [I(G,(S))]\left[\vec{\Omega}_{S/R_0}\right]$$

1.3-Détermination du moment cinétique d'un système matériel (Σ) en un point quelconque de l'espace :

Soit un point quelconque de l'espace tel que : $A \notin (\Sigma)$ On a :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_0) &= \vec{\sigma}_G((\Sigma)/R_0) + \vec{R}_C \wedge \overrightarrow{GA} \\ &= [I(G,(\Sigma))]\left[\vec{\Omega}((\Sigma)/R_0)\right] + \vec{R}_C \wedge \overrightarrow{GA} \\ &= [I(G,(\Sigma))]\left[\vec{\Omega}(\Sigma/R_0)\right] + M\vec{V}_{G}/R_0 \wedge \overrightarrow{GA} \\ &= M\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_G/R_0 + [I(G,(\Sigma))]\left[\vec{\Omega}(\Sigma/R_0)\right]\end{aligned}$$

D'où : $\vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_0) = M\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_G/R_0 + [I(G,(\Sigma))]\left[\vec{\Omega}(\Sigma/R_0)\right]$

2-Torseur dynamique

2.1-Définition

- Le torseur dynamique de (Σ) par rapport R_0 c'est un torseur dont les éléments de réduction en un point A quelconque de l'espace sont donnés par :

$$[T_D/R_0] = \begin{cases} \vec{R}_D = \int\limits_{P\in(\Sigma)} \vec{\gamma}(P/R_0)dm \\ \vec{\delta}_A((\Sigma)/R_0) = \int\limits_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\gamma}(P/R_0)dm \end{cases}_A$$

Avec : $\vec{R}_D$ la résultante dynamique de (Σ) dans son mouvement par rapport à R_0

$\vec{\delta}_A((\Sigma)/R_0)$ Le moment dynamique en A dans son mouvement par rapport à R_0.

- On démontre que : $\vec{R}_D = M.\vec{\gamma}_{G/R_0}$ avec M la masse totale du système matériel (Σ) .

En effet :

$$\vec{R}_D = \int\limits_{P\in(\Sigma)} \vec{\gamma}(P/R_0)dm = \int\limits_{P\in(\Sigma)} \frac{d}{dt}\left(\vec{V}(P/R_0)\right)_{/R_0} dm$$

$$= \frac{d}{dt}\int\limits_{P\in(\Sigma)} \left(\vec{V}(P/R_0)\right)_{/R_0} dm = \frac{d}{dt} M\vec{V}_{G/R_0}$$

$$\vec{R}_D = M\vec{\gamma}_{G/R_0}$$

- La relation entre la résultante dynamique et la résultante cinétique est : $\vec{R}_D = \left.\frac{d\vec{R}_C}{dt}\right|_{R_0}$

En effet :

Scanned by CamScanner

$$\vec{R}_D = \int_{P\in(\Sigma)} \vec{\gamma}(P/R_0)dm = \int_{P\in(\Sigma)} \frac{d}{dt}\left(\vec{V}(P/R_0)\right)_{/R_0} dm$$

$$= \frac{d}{dt}\int_{P\in(\Sigma)} \vec{V}(P/R_0)dm\Big|_{R_0}$$

$$= \frac{d\vec{R}_C}{dt}\Big|_{R_0}$$

Remarque : Comme on va le voir dans le prochain paragraphe, cette relation entre les résultantes des deux torseurs cinétique et dynamique n'est pas vraie pour leurs moments :

$$\boxed{\vec{\delta}_A((\Sigma)/R_0) \neq \frac{d\vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_0)}{dt}\Big|_{R_0}}$$

- Soit A et B deux points quelconques de l'espace. On démontre que :

$$\boxed{\vec{\delta}_A((\Sigma)/R_0) = \vec{\delta}_B((\Sigma)/R_0) + M\vec{\gamma}_{G/R_0} \wedge \overrightarrow{BA}}$$

En effet :

$$\vec{\delta}_A((\Sigma)/R_0) = \int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\gamma}(P/R_0)dm = \int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\gamma}(P/R_0)dm + \int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{BP} \wedge \vec{\gamma}(P/R_0)dm$$

Comme : $\int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\gamma}(P/R_0)dm = \overrightarrow{AB} \wedge \int_{P\in(\Sigma)} \vec{\gamma}(P/R_0)dm = \vec{R}_D \wedge \overrightarrow{BA}$

Et : $\int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{BP} \wedge \vec{\gamma}(P/R_0)dm = \vec{\delta}_B((\Sigma)/R_0)$

D'où :

$$\vec{\delta}_A((\Sigma)/R_0) = \vec{\delta}_B((\Sigma)/R_0) + \vec{R}_D \wedge \overrightarrow{BA} = \vec{\delta}_B((\Sigma)/R_0) + M\vec{\gamma}_{G/R_0} \wedge \overrightarrow{BA}$$

Cette formule permet de calculer le moment dynamique d'un système (Σ), par rapport à un repère R_0, en tout point si on le connaît en un point donné.

Remarque :

Dans le cas particulier où $B = G$ on obtient le théorème de König relatif au moment cinétique :

$$\boxed{\vec{\delta}_A(\Sigma/R_0) = \vec{\delta}_G(\Sigma/R_0) + M\overrightarrow{AG} \wedge \vec{\gamma}(G/R_0)}$$

Cela montre que le moment dynamique d'un système matériel Σ en un point A par rapport à R_0 est égal au moment dynamique de ce système en G, augmenté du terme $M\overrightarrow{AG} \wedge \vec{\gamma}(G/R_0)$, moment dynamique au point A qu'aurait une masse ponctuelle M concentrée en G.

2.2-Détermination du moment dynamique d'un système matériel (Σ) en un point quelconque de l'espace :

Soit A un point quelconque de l'espace. (Σ) Un système matériel de masse M et de centre d'inertie G .On montre que le moment dynamique en A s'écrit :

Scanned by CamScanner

$$\vec{\delta}_A((\Sigma)/R_0)=\left.\frac{d(\vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_0)}{dt}\right|_{R_0}+M.\vec{V}(A/R_0)\wedge\vec{V}(G/R_0)$$

En effet :

$$\vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_0)=\int_{P\in(\Sigma)}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R_0)dm=\int_{P\in(\Sigma)}\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}\right)\wedge\vec{V}(P/R_0)dm$$

Par dérivation, il vient :

$$\left.\frac{d\left(\vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_0)\right)}{dt}\right|_{R_0}=\frac{d}{dt}\left(\int_{P\in(\Sigma)}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R_0)dm\right)_{R_0}=\frac{d}{dt}\left(\int_{P\in(\Sigma)}\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}\right)\wedge\vec{V}(P/R_0)dm\right)_{R_0}$$

$$=\int_{P\in(\Sigma)}\left(\frac{d\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}\right)}{dt}\right)_{R_0}\wedge\vec{V}(P/R_0)dm+\left(\int_{P\in(\Sigma)}\overrightarrow{AP}\wedge\frac{d\vec{V}(P/R_0)}{dt}dm\right)_{R_0}$$

$$=\int_{P\in(\Sigma)}\left(\vec{V}(P/R_0)-\vec{V}(A/R_0)\right)\wedge\vec{V}(P/R_0)dm+\int_{P\in(\Sigma)}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{\gamma}(P/R_0)dm$$

$$=-\vec{V}(A/R_0)\wedge\int_{P\in(\Sigma)}\vec{V}(P/R_0)dm+\vec{\delta}_A((\Sigma)/R_0)$$

$$=-\vec{V}(A/R_0)\wedge M\vec{V}(G/R_0)+\vec{\delta}_A((\Sigma)/R_0)$$

D'où finalement : $\vec{\delta}_A((\Sigma)/R_0)=\left.\frac{d(\vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_0)}{dt}\right|_{R_0}+M.\vec{V}(A/R_0)\wedge\vec{V}(G/R_0)$

Cas particuliers importants :

- Si le point A est fixe dans R_0 : c.à.d : $\vec{V}(A/R_0)=\vec{0}$.On a :

$$\vec{\delta}_A((\Sigma)/R_0)=\left.\frac{d(\vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_0)}{dt}\right|_{R_0}$$

- Si le point A coïncide avec le centre d'inertie G on a :

$$\vec{\delta}_G((\Sigma)/R_0)=\left.\frac{d(\sigma_G((\Sigma)/R_0)}{dt}\right|_{R_0}$$

3-Energie cinétique d'un système matériel

3.1-Définition

L'énergie cinétique d'un système matériel (Σ), de masse M et de centre d'inertie G à l'instant t, par rapport à un repère R_0 a pour expression :

$$E_c((\Sigma)/R_0)=\frac{1}{2}\int_{P\in(\Sigma)}\left(\vec{V}(P/R_0)\right)^2dm=\frac{1}{2}\int_{P\in(\Sigma)}V^2(P/R_0)dm$$

Remarque : si le système Σ se réduit à un point matériel P on a dans ce cas :

$$E_c((\Sigma)/R_0)=\frac{1}{2}M.V^2(P/R_0)$$

Scanned by CamScanner

3.2-Energie cinétique d'un solide indéformable

Soit (S) un solide indéformable de masse M, et A un point quelconque de (S) on a :

$$E_c((S)/R_0)=\frac{1}{2}\int_{P\in(S)}\left(\vec{V}(P/R_0)\right)^2 dm$$

Or : $\vec{V}(P/R_0)=\vec{V}(A/R_0)+\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{AP}$

En remplaçant dans l'expression de l'énergie cinétique on trouve :

$$E_c((S)/R_0)=\frac{1}{2}\int_{P\in(S)}\left(\vec{V}(A/R_0)+\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{AP}\right)^2 dm$$

$$=\frac{1}{2}\int_{P\in(S)}\left[\vec{V}^2(A/R_0)+\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{AP}\right)^2+2\vec{V}(A/R_0)\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{AP}\right)\right]dm$$

$$=\frac{1}{2}M\vec{V}^2(A/R_0)+\frac{1}{2}\int_{P\in(S)}\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{AP}\right)^2 dm+\int_{P\in(S)}\vec{V}(A/R_0)\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{AP}\right)dm$$

Or: $$\int_{P\in(S)}\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{AP}\right)^2 dm=\int_{P\in(S)}\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{AP}\right).\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{AP}\right)dm$$

$$=\int_{P\in(S)}\vec{\Omega}(S/R_0).\left[\overrightarrow{AP}\wedge\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{AP}\right)\right]dm$$

$$=\vec{\Omega}(S/R_0).\int_{P\in(S)}\left[\overrightarrow{AP}\wedge\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{AP}\right)\right]dm$$

$$=\vec{\Omega}(S/R_0).\vec{I}_A(S,\vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$={}^T\left[\vec{\Omega}(S/R_0)\right].\left(\left[I(A,(S))\right]\left[\vec{\Omega}(S/R_0)\right]\right)$$

Et: $$\int_{P\in(S)}\vec{V}(A/R_0).\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{AP}\right)dm=\vec{V}(A/R_0).\left[\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\int_{P\in(S)}\overrightarrow{AP}dm\right]$$

$$=M.\vec{V}(A/R_0).\left[\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{AG}\right]$$

$$=M.\vec{\Omega}(S/R_0).\left[\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A/R_0)\right]$$

D'où:

$$\boxed{E_c((S)/R_0)=\frac{1}{2}M.\vec{V}^2(A/R_0)+\frac{1}{2}{}^T\left[\vec{\Omega}(S/R_0)\right].\left(\left[I(A,(S))\right]\left[\vec{\Omega}(S/R_0)\right]\right)+M.\vec{\Omega}(S/R_0).\left[\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A/R_0)\right]}$$

Cas particuliers importants :

- Si le point A de S est fixe dans R_0 : c.à.d : $\vec{V}(A/R_0)=\vec{0}$

On a : $$\boxed{E_c(S/R_0)=\frac{1}{2}{}^T\left[\vec{\Omega}(S/R_0)\right].\left(\left[I(A,(S))\right]\left[\vec{\Omega}(S/R_0)\right]\right)}$$

- Si le point A coïncide avec le centre d'inertie G on a :

$$\boxed{E_c(S/R_0)=\frac{1}{2}M.\vec{V}^2(G/R_0)+\frac{1}{2}{}^T\left[\vec{\Omega}(S/R_0)\right].\left(\left[I(G,(S))\right]\left[\vec{\Omega}(S/R_0)\right]\right)}$$

Scanned by CamScanner

3.3-Théorème de König pour l'énergie cinétique

Soit R_G le repère barycentrique associé à un repère R_0 et à un système matériel Σ.

Comme : $\vec{V}(P/R_0)=\vec{V}(P/R_G)+\vec{V}(G/R_0)$

On a alors :

$$E_c(\Sigma/R_0)=\frac{1}{2}\int_{P\in(\Sigma)}\left(\vec{V}(P/R_0)\right)^2 dm$$

$$=\frac{1}{2}\int_{P\in(\Sigma)}\left(\vec{V}(P/R_G)+\vec{V}(G/R_0)\right)^2 dm$$

$$=\frac{1}{2}\int_{P\in(\Sigma)}\left(\vec{V}(P/R_G)\right)^2 dm+\frac{1}{2}\int_{P\in(\Sigma)}\left(\vec{V}(G/R_0)\right)^2 dm+\int_{P\in(\Sigma)}\vec{V}(P/R_G)\vec{V}(G/R_0)dm$$

Comme :

$$\int_{P\in(\Sigma)}\left(\vec{V}(G/R_0)\right)^2 dm=M(\Sigma).\left(V(G/R_0)\right)^2$$

$$\int_{P\in(\Sigma)}\vec{V}(P/R_G)\vec{V}(G/R_0)dm=\vec{V}(G/R_0).\int_{P\in(\Sigma)}\vec{V}(P/R_G)dm$$

$$=\vec{V}(G/R_0).\int_{P\in(\Sigma)}\frac{d\overrightarrow{GP}}{dt}dm=\vec{V}(G/R_0).\frac{d}{dt}\left(\int_{P\in(\Sigma)}\overrightarrow{GP}dm\right)$$

$$=0$$

D'où:

$$E_c(\Sigma/R_0)=\frac{1}{2}\int_{P\in(\Sigma)}\left(\vec{V}(P/R_G)\right)^2 dm+\frac{1}{2}M(\Sigma).\left(V(G/R_0)\right)^2$$

Ce résultat porte le nom théorème de König pour l'énergie cinétique. Cela montre que l'énergie cinétique d'un système matériel Σ par rapport à R_0 est égal à l'énergie cinétique de ce système dans son mouvement autour de G, augmenté du terme $\frac{1}{2}M(\Sigma).\left(V(G/R_0)\right)^2$, l'énergie cinétique qu'aurait une masse ponctuelle $M(\Sigma)$ portée par le point G.

3.4- Energie cinétique d'un système matériel déformable

Soit (Σ) un système déformable. On décompose tout d'abord ce système en N solides indéformables (S_i) tel que : $(\Sigma)=\cup(S_i)$, puis on utilise le théorème d'additivité :

$$E_c((\Sigma)/R)=\sum_{i=1}^{N}E_c((S_i)/R)$$

Les $E_c(S_i/R)$ seront calculés comme indiqué précédemment pour le solide indéformable.

Scanned by CamScanner

Exercice d'application: Mouvement d'un cerceau en contact avec un plan fixe

On considère un système constitué d'un cerceau (C) homogène de centre G, de rayon R et de masse m, assujetti à rester en contact ponctuel en I avec le plan horizontal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'un repère orthonormé direct fixe $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ où $(O,\vec{k})$ est la verticale ascendante (voir schéma ci-dessous).

Soient : $R_1(G,\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ et $R_2(G,\vec{u},\vec{w},\vec{k}_s)$ les repères intermédiaires orthonormés et $R_s(G,\vec{i}_s,\vec{j}_s,\vec{k}_s)$ le repère orthonormé lié au cerceau. Le cerceau (C) est repéré par les trois angles d'Euler habituels et (x,y,z) les coordonnées de G dans R.

1-Exprimer la condition géométrique de contact en I .paramétrer la position du cerceau (C).

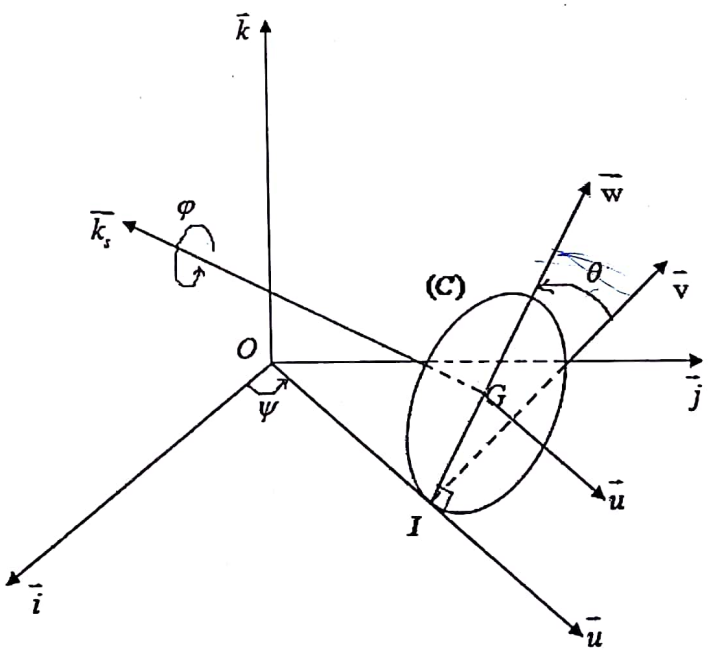
2-Déterminer le vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}(C/R)$, de (C) par rapport à R.

3-Déterminer l'opérateur d'inertie du cerceau (C) en G dans la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{k}_s)$.

4-Exprimer le vecteur moment cinétique en G du cerceau (C) par rapport à R dans la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{k}_s)$.

5-Déterminer le vecteur moment dynamique en G du cerceau (C) par rapport à R dans la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{k}_s)$.

6-Donner l'expression de l'énergie cinétique de (C) par rapport à R.



Eléments de réponse :

1- La liaison contact permanent de (C) avec le plan horizontal $(O,\vec{i},\vec{j})$ se traduit par :

$$\overrightarrow{OI}.\vec{k}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OI}.\vec{k}=\overrightarrow{OG}.\vec{k}+\overrightarrow{GI}.\vec{k}=z-R\sin\theta=0 \quad \text{D'où : } z=R\sin\theta$$

Scanned by CamScanner

Le cerceau est donc un système à 5 paramètres : x, y, ψ, θ et φ

2-

$$\boxed{\vec{\Omega}(C/R)=\dot{\psi}\vec{k}+\dot{\theta}\vec{u}+\dot{\varphi}\vec{k}_s=\dot{\theta}\vec{u}+\dot{\psi}\sin\theta\vec{w}+\left(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)\vec{k}_s}$$

3- la matrice d'inertie de (C) en G dans la base s'écrit $(\vec{u},\vec{w},\vec{k}_s)$:

$$\left[I(G,(C)\right]=\begin{bmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & A & 0\\ 0 & 0 & C\end{bmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{k}_s)}$$

La forme de la matrice d'inertie de (C) en G se justifie par le fait que l'axe $(G,\vec{k}_s)$ est un axe de symétrie de révolution. Par ailleurs cette forme est valable pour toute base se terminant par $\vec{k}_s$ c'est le cas des bases $(\vec{u},\vec{w},\vec{k}_s)$ et $(\vec{i}_s,\vec{j}_s,\vec{k}_s)$.

Les moments principaux d'inertie A et C sont : $C=mR^2$ et $A=\dfrac{mR^2}{2}$

4-

$$\vec{\sigma}(G,(C)/R)=\left[I(G,(C))\right]\left[\vec{\Omega}(C/(R))\right]$$

$$\left[I(G,(C))\right]\left[\vec{\Omega}(C/(R))\right]=\begin{bmatrix}\frac{mR^2}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{mR^2}{2} & 0\\ 0 & 0 & mR^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\psi}\sin\theta\\ \dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}\\ \frac{mR^2}{2}\dot{\psi}\sin\theta\\ mR^2\left(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)\end{pmatrix}$$

D'où : $$\boxed{\vec{\sigma}(G,(C)/R)=\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}\vec{u}+\frac{mR^2}{2}\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{w}+mR^2\left(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\right)\vec{k}_s}$$

5- $$\vec{\delta}(G,(C)/R)=\left.\frac{d\left(\vec{\sigma}(G,(C)/R)\right)}{dt}\right|_R=\left.\frac{d\left(\vec{\sigma}(G,(C)/R)\right)}{dt}\right|_{R_2}+\vec{\Omega}(R_2/R)\wedge\vec{\sigma}(G,(C)/R)$$

$$\vec{\Omega}(R_2/R)=\dot{\psi}\vec{k}+\dot{\theta}\vec{u}=\dot{\theta}\vec{u}+\dot{\psi}\sin\theta\vec{w}+\dot{\psi}\cos\theta\vec{k}_s$$

$$\left.\frac{d\left(\vec{\sigma}(G,(C)/R)\right)}{dt}\right|_{R_2}=\frac{mR^2}{2}\ddot{\theta}\vec{u}+\frac{mR^2}{2}\left(\ddot{\psi}\sin\theta+\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{w}+mR^2\left(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\right)\vec{k}_s$$

$$\vec{\Omega}(R_2/R)\wedge\vec{\sigma}(G,(C)/R)=mR^2\left(\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta+\frac{\dot{\psi}^2}{4}\sin 2\theta\right)\vec{u}-\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}\left(\dot{\psi}\cos\theta+2\dot{\varphi}\right)\vec{w}$$

D'où :

Scanned by CamScanner

$$\vec{\delta}(G,(C)/R)=mR^2\left(\frac{\ddot{\theta}}{2}+\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta+\frac{\dot{\psi}^2}{4}\sin 2\theta\right)\vec{u}+\frac{mR^2}{2}\left(\ddot{\psi}\sin\theta-2\dot{\varphi}\dot{\theta}\right)\vec{w}+mR^2\left(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\right)\vec{k},$$

6- $E_c((C)/R)=\frac{1}{2}mV^2(G/R)+\frac{1}{2}\vec{\Omega}((C)/R).\vec{\sigma}(G,(C)/R)$

$$\frac{1}{2}mV^2(G/R)=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right)$$

$$\frac{1}{2}\vec{\Omega}((C)/R).\vec{\sigma}(G,(C)/R)=\frac{mR^2}{4}\left[\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta+2(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2\right]$$

$$E_c((C)/R)=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right)+\frac{mR^2}{4}\left[\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta+2(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2\right]$$

D'où finalement :

$$E_c((C)/R)=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\frac{mR^2}{4}\left[\dot{\theta}^2(1+2\cos^2\theta)+\dot{\psi}^2\sin^2\theta+2(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2\right]$$

$$E_c(S/R_0)=\frac{1}{2}m\left[\frac{4}{3}a^2\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\left(\frac{a^2}{3}+\frac{4}{3}a^2\cos^2\theta+L^2\right)-2aL\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\right]$$

L'ESSENTIEL

Notion	Formulation
Torseur cinétique d'un système (Σ)	$[T_C/R_0]=\begin{cases}\vec{R}_C=\int_{P\in(\Sigma)}\vec{V}(P/R_0)dm\\ \vec{\sigma}_A(\Sigma/R_0)=\int_{P\in(\Sigma)}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R_0)dm\end{cases}_A$
Résultante cinétique	$\vec{R}_C=M.\vec{V}_{G/R_0}$
Loi de transport des moments cinétique	$\vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_0)=\vec{\sigma}_B((\Sigma)/R_0)+M\vec{V}_{G/R_0}\wedge\overrightarrow{BA}$ A et B deux pts quelconques de l'espace
Torseur dynamique d'un système (Σ)	$[T_D/R_0]=\begin{cases}\vec{R}_D=\int_{P\in(\Sigma)}\vec{\gamma}(P/R_0)dm\\ \vec{\delta}_A((\Sigma)/R_0)=\int_{P\in(\Sigma)}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{\gamma}(P/R_0)dm\end{cases}_A$
Résultante dynamique	$\vec{R}_D=M.\vec{\gamma}_{G/R_0}$

Scanned by CamScanner

Loi de transport des moments dynamiques	$\vec{\delta}_A((\Sigma)/R_0) = \vec{\delta}_B((\Sigma)/R_0) + M\vec{\gamma}_{G/R_0} \wedge \overrightarrow{BA}$
Relation entre les résultantes cinétique et dynamique	$\vec{R}_D = \left.\frac{d\vec{R}_C}{dt}\right\|_{R_0}$
Relation entre les moments cinétique et dynamique	$\vec{\delta}_A((\Sigma)/R_0) = \left.\frac{d(\vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_0)}{dt}\right\|_{R_0} + M.\vec{V}(A/R_0) \wedge \vec{V}(G/R_0)$ Valable pour tout point A de l'espace.
Cas où : $\vec{V}(A/R_0) = \vec{0}$	$\vec{\delta}_A((\Sigma)/R_0) = \left.\frac{d(\vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_0)}{dt}\right\|_{R_0}$
Cas où : $A=G$	$\vec{\delta}_G((\Sigma)/R_0) = \left.\frac{d(\vec{\sigma}_G((\Sigma)/R_0)}{dt}\right\|_{R_0}$
Moment cinétique d'un solide en l'un de ses points	$\vec{\sigma}_A((S)/R_0) = M\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/R_0) + [I(A,S)]\left[\vec{\Omega}(S/R_0)\right]$ Attention : Valable pour un point A lié au solide (S)
Cas où : $\vec{V}(A/R_0) = \vec{0}$ Et : $A \in (S)$	$\vec{\sigma}_A(S/R_0) = [I(A,(S))]\left[\vec{\Omega}_{S/R_0}\right]$ Attention : Valable pour un point A lié au solide (S)
Cas où : $A=G$	$\vec{\sigma}_G(S/R_0) = [I(G,(S))]\left[\vec{\Omega}_{S/R_0}\right]$
Energie cinétique	$E_c((S)/R_0) = \frac{1}{2}\int_{P\in(S)} \left(\vec{V}(P/R_0)\right)^2 dm$
Cas où : $\vec{V}(A/R_0) = \vec{0}$ ET: $A \in (S)$	$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}{}^T\left[\vec{\Omega}(S/R_0)\right].\left([I(A,(S))]\left[\vec{\Omega}(S/R_0)\right]\right)$
Cas où : $A=G$	$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2}M.\vec{V}^2(G/R_0) + \frac{1}{2}{}^T\left[\vec{\Omega}(S/R_0)\right].\left([I(G,(S))]\left[\vec{\Omega}(S/R_0)\right]\right)$ (Relation très utilisée dans les calculs)

Scanned by CamScanner

Chapitre 5:

Dynamique des systèmes matériels et énergétique

La dynamique des systèmes matériels s'appuie sur le principe fondamental de la dynamique. Il exprime la relation, d'une part entre les éléments cinétiques, la quantité de mouvement et le moment cinétique, et, d'autre part, les forces et les moments qui s'exercent sur eux.

1-Forces appliquées à un système

1.1- Définition : On appelle force, tout effort exercé sur un point matériel P appartenant à un système matériel. Elle est représentée par un vecteur lié $\vec{F}(P)$.

1.2-Classification des forces :

- ***Forces extérieures :*** ce sont les forces exercées sur le système par tout corps extérieur au système en question.
- ***Forces intérieures :*** ce sont les forces d'interaction entre les éléments du même système.
- ***Forces de contact :*** Ce sont les forces qui résultent du contact entre deux solides. Ces forces ne sont pas fondamentales simples dont on connaît l'expression. Elles dépendent de la nature exacte de l'interaction entre des ensembles de particules, de la position de ces particules au voisinage des surfaces en contact et par conséquent de la structure microscopique des surfaces. Ces forces augmentent le nombre d'inconnues du problème.

1.3-Vecteur des forces extérieures

- Pour un système discret $(\Sigma)_{discret} = \{\Sigma_1(P_1), \Sigma_2(P_2), ..., \Sigma_n(P_n)\}$ dont chaque sous-système $S_i(P_i)$ subit la force $\vec{F}_i(P_i)$. La force totale exercée sur $S_{discret}$ est la somme des forces élémentaires : $\vec{F}((\Sigma)_{discret}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i(P_i)$

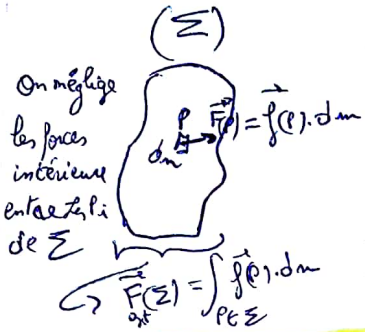
- Pour un système continu $S_{continu}$, On introduit le vecteur lié $\vec{f}(P)$ représentant la densité massique de force qui s'exerce sur un point P de $(\Sigma)_{continu}$. Si On associe la masse dm au point P, La force totale est la résultante définie par : $\vec{F}(\Sigma_{continu}) = \int_{P\in(S)} \vec{f}(P)dm$

2-Torseur des efforts extérieurs

- Le torseur des efforts extérieures à un système matériel (Σ) au point A c'est un torseur dont les éléments de réduction en A sont donnés par :
  - Si (Σ) est discret :

Scanned by CamScanner

$$\left[T_{F_{ext}}\right]=\begin{cases}\vec{F}_{ext}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i(P_i)\\ \vec{M}_A(\vec{F}_{ext},(\Sigma))=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{AP_i}\wedge\vec{F}_i(P_i)\end{cases}$$



➢ Si (Σ) est continu :

$$\left[T_{F_{ext}}\right]=\begin{cases}\vec{F}_{ext}=\int_{P\in(\Sigma)}\vec{f}(P)dm\\ \vec{M}_A(\vec{F}_{ext},(\Sigma))=\int_{P\in(\Sigma)}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{f}(P)dm\end{cases}$$

Avec : $\vec{F}_{ext}$ la résultante des forces extérieures appliquées à (Σ).

Et : $\vec{M}_A(\vec{F}_{ext},(\Sigma))$ le moment en A des forces extérieures appliquées à (Σ).

3-Principe fondamental de la dynamique

Considérons un système matériel (Σ) de masse m en mouvement dans un repère galiléen R_g. Soit $\left[T_D/R_g\right]$ le torseur dynamique par rapport à R_g au point A et $\left[T_{F_{ext}}\right]$ le torseur des efforts extérieures à (Σ) au point A.

3.1- Enoncé du principe fondamental de la dynamique (P.F.D) :

Dans tout repère galiléen R_g et pour tout système matériel le torseur dynamique par rapport à R_g est égal à chaque instant au torseur des efforts *extérieurs en même point.*

En terme tensoriel, à chaque instant et au point A on a : $\left[T_D/R_g\right]_A=\left[T_{F_{ext}}\right]_A$

Remarque :

Seul le torseur des efforts extérieurs qui intervient dans le principe fondamental de la dynamique.

3.2-Théorème des actions réciproques (théorème d'action et de réaction) :

Il s'agit d'une conséquence importante du principe fondamentale de la dynamique.

Si un système matériel (Σ_1) exerce sur un autre système (Σ_2) le torseur des efforts $\left[T_{F_{ext}}{}^{1\to2}\right]$ alors le système (Σ_2) exerce sur (Σ_1) le torseur des efforts $\left[T_{F_{ext}}{}^{2\to1}\right]$ tel que :

$$\left[T_{F_{ext}}{}^{1\to2}\right]=-\left[T_{F_{ext}}{}^{2\to1}\right]$$

Démonstration :

Soit (Σ) l'ensemble des sous-systèmes (Σ_1) et (Σ_2) :

$$(\Sigma)=(\Sigma_1)\cup(\Sigma_2)\text{ Avec : }(\Sigma_1)\cap(\Sigma_2)=\varnothing$$

Et soit R_g un repère galiléen. D'après Le P.F.D appliqué à (Σ) on a :

$$\left[T_D(\Sigma)/R_g\right]=\left[T_{F_{ext}}\right]\ (*)$$

$\left[T_{F_{ext}}/R_g\right]$: Torseur des efforts extérieurs à (Σ) exercées par l'univers privé de (Σ).

Le P.F.D appliqué à (Σ_1) se traduit par :

Scanned by CamScanner

$$\left[T_D(\Sigma_1)/R_g\right]=\left[T_{F_{ext}}{}^{2\to1}\right]+\left[T_{F_{ext}}{}^{(1)}\right] \quad (**)$$

Avec : $\left[T_{F_{ext}}{}^{(1)}\right]$ Torseur des efforts extérieurs exercées par l'univers privé de (Σ_2) sur (Σ_1) Le P.F.D appliqué à (Σ_2) se traduit par :

$$\left[T_D(\Sigma_2)/R_g\right]=\left[T_{F_{ext}}{}^{1\to2}\right]+\left[T_{F_{ext}}{}^{(2)}\right] \quad (***)$$

Avec : $\left[T_{F_{ext}}{}^{(2)}\right]$ Torseur des efforts extérieurs exercées par l'univers privé de (Σ_1) sur (Σ_2). Il vient en sommant membre à membre les équations (**) et (***) :

$$\left[T_D(\Sigma_1)/R_g\right]+\left[T_D(\Sigma_2)/R_g\right]=\left[T_{F_{ext}}{}^{2\to1}\right]+\left[T_{F_{ext}}{}^{(1)}\right]+\left[T_{F_{ext}}{}^{1\to2}\right]+\left[T_{F_{ext}}{}^{(2)}\right]$$

Or : $\left[T_D(\Sigma_1)/R_g\right]+\left[T_D(\Sigma_2)/R_g\right]=\left[T_D(\Sigma)/R_g\right]$

Et : $\left[T_{F_{ext}}{}^{(1)}/R_g\right]+\left[T_{F_{ext}}{}^{(2)}/R_g\right]=\left[T_{F_{ext}}/R_g\right]$

D'où : $\left[T_D(\Sigma)/R_g\right]=\left[T_{F_{ext}}{}^{2\to1}\right]+\left[T_{F_{ext}}{}^{1\to2}\right]+\left[T_{F_{ext}}\right]$

D'où de l'équation (*) on a : $\left[T_{F_{ext}}{}^{2\to1}\right]+\left[T_{F_{ext}}{}^{1\to2}\right]=0 \Leftrightarrow \left[T_{F_{ext}}{}^{1\to2}\right]=-\left[T_{F_{ext}}{}^{2\to1}\right]$

4-Théorèmes généraux de la dynamique

Les théorèmes généraux sont des conséquences directes du principe fondamental de la dynamique.

Soit un système matériel (Σ) rapporté à un repère galiléen R_g.

4.1- Théorème de la résultante dynamique

- **Forme générale :**

  La résultante dynamique de (Σ) est égale à la résultante générale du torseur des efforts extérieurs subies par (Σ) :

$$\vec{R}_D(\Sigma/R_g)=\vec{F}_{ext}$$

- **Théorème de la résultante cinétique ou de la quantité de mouvement :**

  La dérivé par rapport au temps de la résultante cinétique est égale à la résultante générale du torseur des efforts extérieurs subies par (Σ) :

$$\left(\frac{d\vec{R}_C(\Sigma/R_g)}{dt}\right)_{R_g}=\vec{F}_{ex}$$

- **Théorème du mouvement du centre de masse :**

  La quantité d'accélération du centre de masse de (Σ) affectée de la masse m de ce système est égale à la résultante générale du torseur des efforts extérieurs subies par (Σ) : $\vec{F}_{ext}=m\vec{\gamma}_{(G/R_g)}$

4.2-Théorème du moment dynamique

- **Forme générale :**

Scanned by CamScanner

Le moment dynamique d'un système matériel (Σ) évalué en un point quelconque A est égal au moment au même point du torseur des efforts extérieurs subies par (Σ):

$$\vec{\delta}_A((\Sigma)/R_g) = \vec{M}_A(\vec{F}_{ext},(\Sigma))$$

- **Théorème du moment cinétique :**

Le moment en A du torseur des efforts extérieurs subies par (Σ) est la somme de la dérivé du moment cinétique de (Σ) évalué en un point A et du produit vectoriel de la vitesse de A et de la quantité de mouvement de (Σ):

$$\left.\frac{d(\vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_g)}{dt}\right|_{R_g} + m\vec{V}(A/R_g)\wedge\vec{V}(G/R_g) = \vec{M}_A(\vec{F}_{ext},(\Sigma))$$

Cas particuliers importants :

- Si le point $A = O$ est fixe dans R_g On a :

$$\left.\frac{d(\vec{\sigma}_O((\Sigma)/R_g)}{dt}\right|_{R_g} = \vec{M}_O(\vec{F}_{ext},(\Sigma))$$

- Si le point A coïncide avec le centre d'inertie G on a :

$$\left(\frac{d(\vec{\sigma}_G((\Sigma)/R_g)}{dt}\right)_{R_g} = \vec{M}_G(\vec{F}_{ext},(\Sigma))$$

Remarque :

Parmi les actions mécaniques extérieures, on distingue deux catégories : les forces ou couples donnés, dont la valeur ou l'expression est connue a priori (la force de pesanteur, la force de rappel d'un ressort, le couple de torsion …) et les forces et couples de contact ou de liaison ; seule cette deuxième catégorie rajoute des inconnues au problème mécanique à résoudre.

Pour simplifier les calculs, on transporte tous les torseurs au point d'application d'une action inconnue, et lorsque plusieurs actions sont inconnues, on prend le point d'application de l'action « la moins connue » (celle ayant le plus de composantes inconnues).

4- Intégrale première du moment cinétique :

En un point $A=G$ ou A un point fixe de R_g on a vu que : $\left(\frac{d(\vec{\sigma}_A(S/R_g)}{dt}\right)_{R_g} = \vec{M}_A(\vec{F}_{ext},S)$. S'il existe un axe fixe galiléen de direction unitaire $\vec{u}$ tel que : $\vec{M}_A(\vec{F}_{ext},S)\vec{u} = 0$, il vient :

$$\vec{u}.\left(\frac{d(\vec{\sigma}_A(S/R_g))}{dt}\right)_{R_g} = \left(\frac{d(\vec{u}.\vec{\sigma}_A(S/R_g))}{dt}\right)_{R_g} = \vec{u}.\vec{M}_A(\vec{F}_{ext},S) = 0$$

Scanned by CamScanner

D'où finalement : $\boxed{\vec{u}.\vec{\sigma}_A(S/R_g)=cte}$ ⇒ !! Ça donne des équations de mouvement de 1er ordre

Cette relation est une intégrale première du mouvement. On l'appelle ***intégrale première du moment cinétique.***

5-Torseur des efforts intérieurs

La description des efforts intérieurs à (Σ) est beaucoup plus délicate. Lorsqu'on veut schématiser de tels efforts, il convient toujours de distinguer une partie (Σ_1) du système matériel et d'envisager l'action exercée par (Σ_1) sur le reste (Σ_2) de (Σ). La partie (Σ_1) est alors extérieur à (Σ_2) et on peut associer un torseur $\left[T_F^{1\to 2}\right]$, torseur des efforts exercés par (Σ_1) sur (Σ_2).

Le torseur que réalisent les efforts intérieurs d'un système matériel est noté $\left[T_{F_{int}}\right]$. D'après le principe des actions réciproques, le torseur des efforts intérieurs d'un solide est nul.

6-Lois de conservation :

Pour un système isolé (Σ) c'est-à-dire seul dans l'espace ou soumis à des actions négligeables, on a $\vec{F}_{ext}=\vec{0}$ et $\vec{M}_A(\vec{F}_{ext},(\Sigma))=\vec{0}$. Il résulte de ce qui précède que la quantité de mouvement et du moment cinétique se conservent :

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{R}_C(\Sigma/R_g)}{dt}\right)_{R_g}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{R}_C(\Sigma/R_g)=\overrightarrow{cte}} \Leftarrow m\vec{V}_{(G/R_g)}=\vec{cte}$$

$$\vec{f}_A((\Sigma)/R_g)=\vec{0} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{d(\vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_g)}{dt}\right|_{R_g}=\vec{M}_A(\vec{F}_{ext},(\Sigma)) \Leftrightarrow \vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_g)=\overrightarrow{cte} \quad (A\in R_g)}$$

$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_A((\Sigma)/R_g)}{dt}=\vec{0}$

Il en est de même, lorsque le système est soumis à des forces et des moments qui se neutralisent et ; On dit qu'il est pseudo-isolé.

7- Puissance- Travail

7.1-Cas d'un point matériel

Soit un point matériel M en mouvement dans un repère R_0 et soumis à une force $\vec{F}$ (ou résultante de forces $\vec{F}$). La puissance de $\vec{F}$ dans R_0 est définie par :

$$P(\vec{F}/R_0)=\vec{F}.\vec{V}(M/R_0)$$

Et le travail est donné par :

$$\delta W(\vec{F})=P(\vec{F}/R_0).dt = \vec{F}\cdot\vec{V}(M/R_0)\,dt$$

7.2- Puissance de forces extérieures sur un solide indéformable

Soit (S) un solide en mouvement dans R_0 et $d\vec{F}(M)=\vec{f}(M)dm$ ($\vec{f}(M)$ est la densité massique de force) est la force extérieure qui s'exerce sur l'élément de volume dV centré en

Scanned by CamScanner

M. La puissance développée par ces forces extérieures sur (S) est définie par :

$$P_{ext} = \int_{(M\in S)} \vec{V}(M/R_0).d\vec{F}(M) = \int_{(M\in S)} \vec{V}(M/R_0).\vec{f}(M)dm$$

Or le champ des vitesses sur (S) est antisymétrique, donc :

$$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{AM} \quad ; \quad A \text{ un point arbitraire de } (S).$$

Et il vient :

$$\begin{aligned} P_{ext} &= \int_{(M\in S)} \left[\vec{V}(A\in S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{AM}\right].\vec{f}(M)dm \\ &= \int_{(M\in S)} \vec{V}(A\in S/R_0).\vec{f}(M)dm + \int_{(M\in S)} \left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{AM}\right).\vec{f}(M)dm \\ &= \vec{V}(A\in S/R_0).\int_{(M\in S)} \vec{f}(M)dm + \vec{\Omega}(S/R_0)\int_{(M\in S)} \overrightarrow{AM}\wedge\vec{f}(M)dm \\ &= \vec{V}(A\in S/R_0).\vec{F}_{ext} + \vec{\Omega}(S/R_0).\vec{M}_A(\vec{F}_{ext},(\Sigma)) \end{aligned}$$

D'où finalement : $\boxed{P_{ext} = [T_V/R_0]_A \cdot [T_{F_{ext}}]_A}$

$$[T_V/R_0]_A = \begin{cases} \vec{\Omega}_{S/R_0} \\ \vec{V}(A/R_0) \end{cases}_A$$

$$[T_{F_{ext}}]_A = \begin{cases} \vec{F}_{ext} \\ \vec{M}_A(\vec{F}_{ext}/R_0) \end{cases}_A$$

Remarque :

Si $[T_{F_{ext}}]_A$ est un couple alors : $[T_{F_{ext}}]_A = \begin{cases} \vec{0} \\ \vec{M}_c \neq 0 \end{cases}$ et : $P_{ext} = \vec{\Omega}(S/R_0).\vec{M}_c$

7.3- Puissance de forces intérieures sur un solide indéformable

La puissance des forces intérieures à un solide indéformable est nulle.

8- Energie potentielle

8.1- Forces conservatives

Définition 1 :

$\vec{F}$ est un champ de forces, appliqué à un système (Σ), dérive d'un potentiel scalaire E_p appelé énergie potentiel d'interaction, s'il existe un champ scalaire tel que : $\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p}$. On dit dans ce cas, que le champ de force $\vec{F}$ est conservatif.

Remarque : le potentiel scalaire est défini à une constante additive près.

Définition 2 :

Une force $\vec{F}$ qui s'exerce sur un système matériel (Σ) est dite conservative si, il existe une fonction scalaire E_p telle que :

$$\boxed{P(\vec{F}) = -\frac{dEp}{dt}}$$

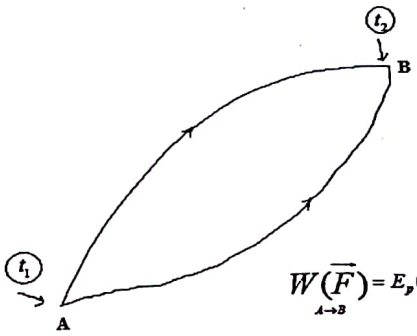
Scanned by CamScanner

$P(\vec{F})$: Puissance de la force $\vec{F}$.

E_p : L'énergie potentielle dont dérive la force $\vec{F}$.

Remarque :

Le travail produit par une force conservative lors du déplacement de son point d'application entre deux instants est indépendant du chemin suivi par ce point entre ces deux instants.

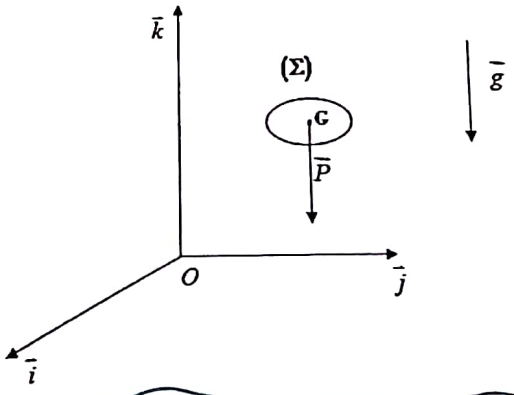


Exemple 1 : Energie potentielle de pesan

Au voisinage de la surface terrestre, ... e,

On démontre dans le cas où la verticale est orienté vers le haut que l'énergie potentielle de pesanteur d'un système matériel (Σ) de masse m de centre d'inertie G est donnée par la relation :

$$E_{pp} = mgz_G + cte$$



En effet: $P(\vec{P}) = \vec{P}.\vec{V}_G = -mg\vec{k}.(\dot{x}_G\vec{i} + \dot{y}_G\vec{j} + \dot{z}_G\vec{k}) = -mg\dot{z}_G$

Et: $P(\vec{P}) = -\dfrac{d(mgz_G)}{dt} = -\dfrac{d(E_{pp})}{dt}$

D'où: $E_{pp} = -mgz_G + cte$

Remarque : si la verticale est orientée vers le bas, cette relation devient :

$$E_{pp} = -mgz_G + cte$$

$\vec{F} \Rightarrow \vec{rot}(\vec{F}) = 0$

$\vec{rot}(\vec{grad}) = 0$

$\Rightarrow \exists E_p$ tq $\vec{rot}(\vec{grad}(E)) = \vec{rot}(\vec{F}) = 0$

Scanned by CamScanner

Exemple 2 : Energie potentielle élastique

Supposons un repère $(O,\vec{i})$ avec O représentant la position de l'extrémité du ressort au repos et $\vec{i}$ dirigé suivant l'axe du ressort. La force de rappel exercée par le ressort subissant une déformation élastique (allongement ou compression), obéissant à la loi de Hooke : $\vec{F} = -Kx\,\vec{i}$

Où x est la variation de longueur du ressort à partir de l'état de repos. x Sera positif dans le cas d'un allongement et négatif dans le cas d'une compression.

K : Est une constante positive caractérisant La raideur du ressort. Ces forces de rappel dérivent d'une énergie potentielle, dite **énergie potentielle élastique** :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}Kx^2 + cte$$

$P = \vec{F}.\vec{V}_{a/R_0} = -Kx\vec{i}.\dot{x}\vec{i} = -Kx\dot{x} = -Kx\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{2}\frac{d(Kx^2)}{dt} = \frac{d\left(-\frac{1}{2}Kx^2\right)}{dt} \Rightarrow E_{pe} = \frac{-1}{2}Kx^2 + cte = \frac{d(E_{pe})}{dt}$

9- Théorème de l'énergie cinétique pour un solide (S)

Soit R_g un repère galiléen et soit $\left[T_{F_{ext}}\right]$ le torseur des efforts extérieurs exercés sur un solide (S). La dérivé par rapport au temps de l'énergie cinétique du solide (S), $E_c(S/R_g)$, relativement au repère R_g, est égale à la puissance, P_{ext}, relativement à ce même repère, des efforts extérieurs subis par (S).

$$P_{ext} = \left.\frac{dE_c(S/R_g)}{dt}\right|_{R_g}$$

Démonstration :

On a déjà démontré que: $P_{ext} = \left[T_V/R_0\right]_A.\left[T_{F_{ext}}\right]_A$ et D'après le P.F.D on écrit:

$$P_{ext} = \left[T_V/R_0\right]_A.\left[T_D(S/R_g\right]_A$$

Donc: $P_{ext} = \vec{V}(A\in S/R_g).\overrightarrow{R_D} + \vec{\Omega}(S/R_0).\vec{\delta}_A(S/R_g)$

$$= \vec{V}(A\in S/R_g).\int_{P\in(S)}\vec{\gamma}(P/R_0)dm + \vec{\Omega}(S/R_0).\int_{P\in(S)}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{\gamma}(P/R_0)dm$$

$$= \int_{P\in(S)}\vec{V}(A\in S/R_g).\vec{\gamma}(P/R_0)dm + \int_{P\in(S)}\vec{\Omega}(S/R_0).\left[\overrightarrow{AP}\wedge\vec{\gamma}(P/R_0)\right]dm$$

$$= \int_{P\in(S)}\left[\vec{V}(P\in S/R_g) + \vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{PA}\right].\vec{\gamma}(P/R_0)dm + \int_{P\in(S)}\vec{\Omega}(S/R_0).\left(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{\gamma}(P/R_0)\right)dm$$

Donc :

$$P_{ext} = \int_{P\in(S)}\vec{V}(P\in S/R_g).\vec{\gamma}(P/R_0)dm + \int_{P\in(S)}\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{PA}\right).\vec{\gamma}(P/R_0)dm + \int_{P\in(S)}\vec{\Omega}(S/R_0).\left(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{\gamma}(P/R_0)\right)dm$$

Or $\int_{P\in(S)}\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{PA}\right).\vec{\gamma}(P/R_0)dm = -\int_{P\in(S)}\vec{\Omega}(S/R_0).\left(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{\gamma}(P/R_0)\right)dm$

Donc: $P_{ext} = \int_{P\in(S)}\vec{V}(P/R_g).\vec{\gamma}(P/R_0)dm$

D'où :

$$P_{ext} = \int_{P\in S}\vec{V}(P/R_g).\frac{d\vec{V}(P/R_g)}{dt}dm = \int_{P\in S}\frac{1}{2}\frac{d\left(\vec{V}_{P/R_g}^2\right)}{dt}dm$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\int_{P\in S}\frac{1}{2}V_{(P/R_g)}^2\,dm\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}V_{(P/R_g)}^2\,m\right)$$

$$= \frac{dE_c}{dt}$$

Scanned by CamScanner

$$P_{ext} = \int_{P\in(S)} \vec{V}(P/Rg).\left(\frac{d\vec{V}(P/Rg)}{dt}\right)_{R_g} dm = \int_{P\in(S)} \left(\frac{1}{2}\frac{d\vec{V}^2(P/Rg)}{dt}\right)_{R_g} dm = \frac{d}{dt}\left(\int_{P\in(S)} \frac{1}{2}\vec{V}^2(P/Rg)dm\right)_{R_g}$$

D'où finalement :

$$\boxed{P_{ext} = \left.\frac{dE_c(S/R_g)}{dt}\right|_{R_g}}$$

Remarque :

En terme de travail, le théorème de l'énergie cinétique s'exprime comme suit :

Dans tous mouvement d'un solide (S) par rapport à un repère galiléen, le travail des efforts extérieures exercés sur ce solide entre les instants t_1 et t_2 est égal à la variation de l'énergie cinétique de (S) entre ces deux instants.

En effet :

$$P_{ext} = \left.\frac{dE_c(S/R_g)}{dt}\right|_{R_g} \Leftrightarrow P_{ext}.dt = dE_c(S/R_g) \Rightarrow \delta W_{ex} = dE_c(S/R_g)$$

$$D'où : W_{ex} = \int_{t_1}^{t_2} dE_c(S/R_g) = E_c(t_2) - E_c(t_1)$$

10- Energie mécanique

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g et supposant que (S) est soumis à plusieurs forces extérieures.

Soient :

P_{ex} : La puissance de forces extérieures qui dérivent d'une énergie potentielle $\left(P_{ex} = -\frac{dE_{p_{ex}}}{dt}\right)$

c.à.d la puissance des forces conservatives.

P'_{ex} : La puissance de forces extérieures qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle. c.à.d la puissance des forces non conservatives.

D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\left.\frac{dE_c(S/R_g)}{dt}\right|_{R_g} = P_{ex} + P'_{ex} \Leftrightarrow \left.\frac{dE_c(S/R_g)}{dt}\right|_{R_g} = -\frac{dE_{p_{ex}}}{dt} + P'_{ex}$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{d\left[E_c(S/R_g) + E_{p_{ex}}\right]}{dt}\right|_{R_g} = P'_{ex}$$

La quantité $E_m = E_c(S/R_g) + E_{p_{ex}}$ est appelée **énergie mécanique du solide**

La dérivé par rapport au temps de l'énergie mécanique est égale à la puissance de forces extérieures non conservatives : $\boxed{\left.\frac{dE_m}{dt}\right|_{R_g} = P'_{ex}}$

Scanned by CamScanner

Si la puissance des forces non conservatives est nulle, alors : $\boxed{\left.\frac{dE_m}{dt}\right|_{R_g} = 0}$. Dans ce cas l'énergie mécanique se conserve $E_m = E_c(S/R_g) + E_{p_{ex}} = cte$ .et le système est dit conservatif.

11- Intégrale première de l'énergie

Dans un système conservatif, l'expression : $E_m = E_c(S/R_g) + E_{p_{ex}}$ est une intégrale première de l'énergie.

$P(\vec{E}/R) = \vec{F} \cdot \vec{V}(M/R_0)$

$P_{\substack{E/R \\ ext}} = [T_{V/R_0}][T_{Fext}]$

Scanned by CamScanner

Chapitre 6:

Liaisons

1-Notion de liaison

1.1-Définition

On peut définir une liaison comme étant l'ensemble de conditions particulières auxquelles est assujetti un système matériel Σ par rapport à un autre système Σ' qui limite les mouvements relatifs possibles de l'un par rapport à l'autre (ce qui revient à imposer certaines conditions aux paramètres primitifs) et qui détermine leur degré de liberté relatif.

1.2- Description d'une liaison

La description d'une liaison exige fondamentalement plus que l'écriture des équations géométriques ou cinématiques traduisant les restrictions que cette liaison apporte à la liberté du système étudié que si l'on possède aussi des informations sur les efforts de liaisons par lesquelles cette restriction s'accomplit.

La description d'une liaison comporte donc trois informations :

- La condition que nous appellerons *liaison de position ou géométrique.*
- La condition que nous appellerons *liaison cinématique.*
- La condition que nous appellerons *liaison dynamique.*

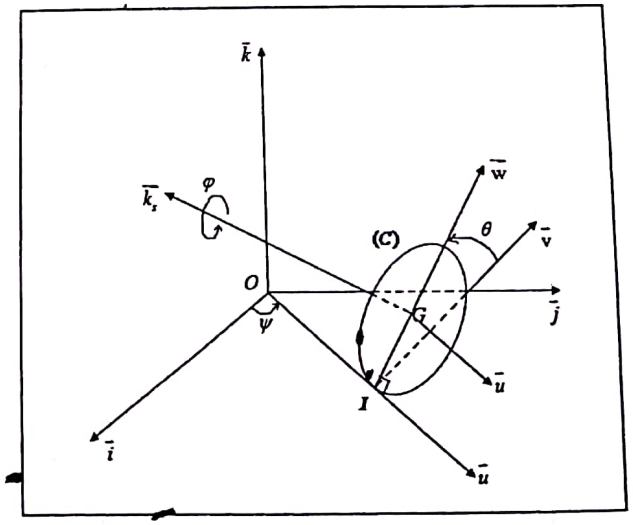
1.2.1- Liaison géométrique ou de position

Cette liaison découle de l'indéformabilité du système étudié. Elle s'exprime sous la forme de relations finies entre les paramètres primitifs.

A- liaison par contact ponctuel :

Exemple 1 :

Disque homogène de centre G, de rayon R, et dont un diamètre $(G,\vec{w})$, est incliné sur le plan horizontal $(O,\vec{i},\vec{j})$ du repère R_0.

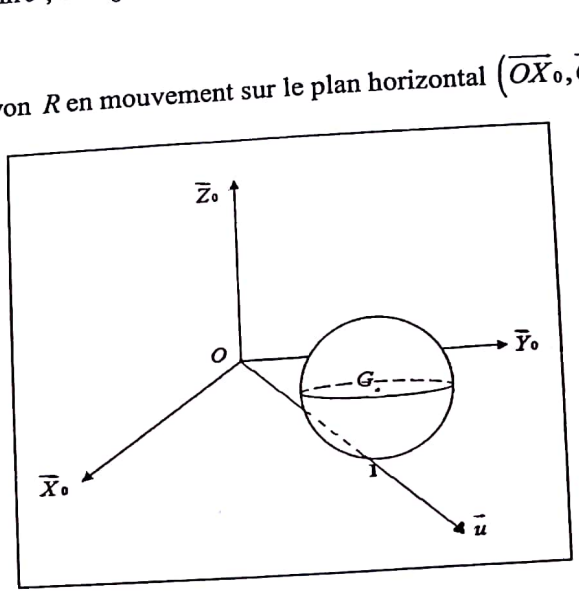


Scanned by CamScanner

Dans ce cas, la liaison « contact permanent du disque avec le plan horizontal » se traduit par : une seule équation : $z_G = R\sin\theta$, où z_G est la côte du centre d'inertie du disque.

Exemple 2 :

Sphère homogène de rayon R en mouvement sur le plan horizontal $\left(\overrightarrow{OX}_0, \overrightarrow{OY}_0\right)$ du repère R_0.



Dans ce cas, la liaison se traduit par $z_G = R$ avec z_G côte du centre d'inertie G de la sphère.

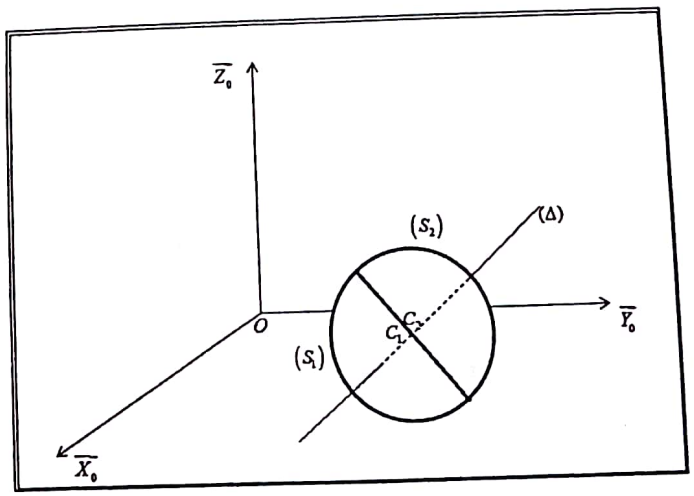
B- Liaison pivot ou cylindrique :

On dira que deux systèmes matériels (Σ_1) et (Σ_2) subissent une liaison pivot s'il existe un axe (Δ) fixe par rapport aux deux systèmes et tel que les seuls mouvements possibles de ces deux systèmes soient des rotations autour de cet axe (Δ) qui est l'axe de la liaison pivot.

Donc si $A \in (\Sigma_1)$ et $A \in (\Delta)$, on a : $\vec{V}\left((A \in \Sigma_1)/\Sigma_2\right) = \vec{0}$ et $\vec{\Omega}\left((\Sigma_1)/\Sigma_2\right)$ parallèle à (Δ).

Exemple :

On considère deux demi-sphères (S_1) et (S_2) de même rayon R, soumises à une liaison pivot d'axe (Δ) passant leur sommet respectif et perpendiculaire à leur surface de base. L'une de ces deux demi-sphères, (S_1) par exemple, ayant un contact ponctuel avec le plan horizontal $\left(\overrightarrow{OX}_0, \overrightarrow{OY}_0\right)$ du repère R_0.



Scanned by CamScanner

Cette liaison impose à chaque instant l'égalité des angles de précession des deux demi-sphères afin d'éviter le débordement de l'une sur l'autre $\psi_1 = \psi_2$. Elle impose aussi l'égalité des angles de nutation des deux demi-sphères $\theta_1 = \theta_2$ afin d'éviter le décollement de l'une par rapport à l'autre.
De plus les centres C_1 et C_2 vérifient : $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC_2}$
Donc le seul mouvement relatif des deux demi-sphères est un mouvement de rotation propre.
Ce système n'est en fin de compte décrit que par six paramètres :

$$x_1 = x_2;\ \ y_1 = y_2;\ \ \psi_1 = \psi_2;\ \ \theta_1 = \theta_2;\ \ \varphi_1; \varphi_2;\ \ puisque : z_1 = z_2 = R$$

C- liaison glissière :
On dira que deux systèmes (Σ_1) et (Σ_2) subissent une liaison glissière s'il existe un axe (Δ) fixe par rapport aux deux systèmes et tel que les seuls mouvements possibles de ces deux systèmes soient des coulissements le long de cet axe (Δ) qui est la direction de la liaison glissière.
Donc si $A \in (\Sigma_1)$ et $A \in (\Delta)$ on a : $\vec{V}\left((A \in \Sigma_1)/\Sigma_2\right)$ parallèle à (Δ) et $\vec{\Omega}\left((\Sigma_1)/\Sigma_2\right) = \vec{0}$.

D- liaison verrou :
On dira que deux systèmes matériels (Σ_1) et (Σ_2) subissent une liaison verrou s'il existe un axe fixe par rapport aux deux systèmes et tel que les seuls mouvements possibles de ces deux systèmes soient à la fois des coulissements et des rotations autour de cet axe.
Donc si $A \in (\Sigma_1)$ et $A \in (\Delta)$ on a : $\vec{V}\left((A \in \Sigma_1)/\Sigma_2\right)$ parallèle à (Δ) et $\vec{\Omega}\left((\Sigma_1)/\Sigma_2\right)$ parallèle à (Δ).

1.2.2- Liaison cinématique
La liaison cinématique consiste en des restrictions sur le champ des vitesses. Elle s'exprime par des équations reliant les paramètres primitifs et leurs dérivées.

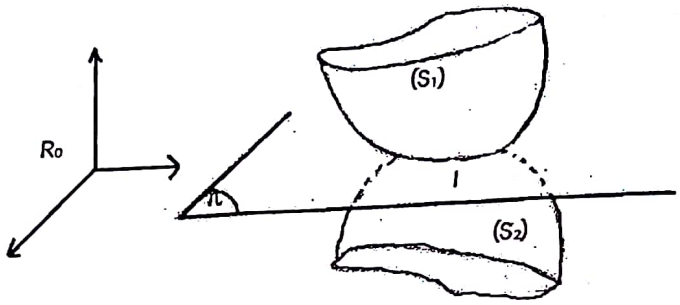
A- liaison point fixe ou liaison sphérique :
On dira qu'un solide (S) admet une liaison sphérique en l'un de ses points, A, par rapport à un repère R_0, si ce point A est fixe par rapport à R_0. Cette liaison se traduit par $\vec{V}\left(A \in S/R_0\right) = \vec{0}$, on en déduit : $\forall P \in (S),\ \vec{V}(P/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AP}$.
Le torseur cinématique décrivant le mouvement de (S) par rapport à R_0 est, dans ce cas, un glisseur. Les seuls mouvements possibles pour le solide (S) sont des mouvements de rotation autour du point A.

B- liaison non glissement, non roulement, non pivotement :
Le cas le plus souvent rencontré, est celui d'un contact ponctuel où les deux solides (S_1) et (S_2) admettent un plan tangent commun de contact (π).

- **la liaison non glissement :**

Considérons deux solides (S_1) et (S_2) en mouvement par rapport à un référentiel R_0 de telle sorte que leurs surfaces en contact en un point géométrique I.

Scanned by CamScanner



On rappelle que la vitesse de glissement de S_1 par rapport à S_2 est :

$$\vec{V}_g(S_1/S_2) = \vec{V}_{I\in S_1/S_2} = \vec{V}(I\in S_1/R_0) - \vec{V}(I\in S_2/R_0)$$

Si, pendant un intervalle de temps, $\vec{V}_g(S_1/S_2) = \vec{0}$, on dit qu'il y a non glissement du solide S_1 par rapport au solide S_2. On a alors : $\vec{V}(I\in S_1/R_0) = \vec{V}(I\in S_2/R_0)$.

Exemple : voir chapitre 2 - paragraphe 4 -application 2.

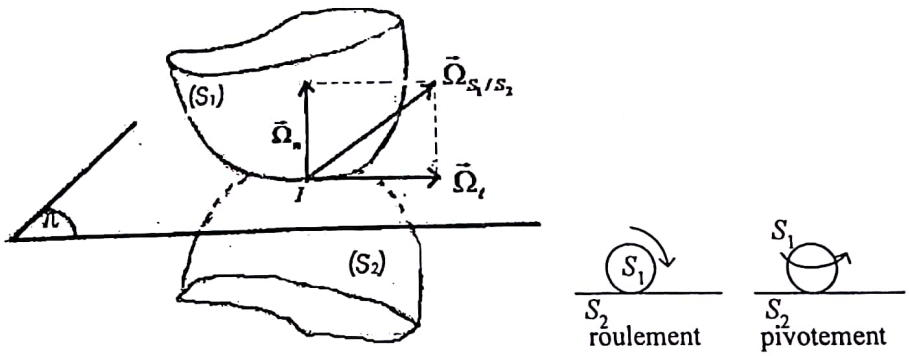
- **La liaison non roulement ou le non pivotement.**

Comme on a vu dans le chapitre 2, le vecteur rotation instantanée de (S_1) par rapport à (S_2) s'écrit :

$$\vec{\Omega}_{S_1/S_2} = \vec{\Omega}_t + \vec{\Omega}_n$$

$\vec{\Omega}_n$: vitesse angulaire de pivotement $\vec{\Omega}_N \perp \pi$

$\vec{\Omega}_t$: vitesse angulaire de roulement $\vec{\Omega}_T \in \pi$



- Le non roulement de (S_1) par rapport à (S_2) se traduit par : $\vec{\Omega}_t = \vec{0}$.
- Le non pivotement de (S_1) par rapport à (S_2) se traduit par : $\vec{\Omega}_n = \vec{0}$.

1.2.3- Liaison dynamique :

Ce type de liaisons impose des restrictions sur les efforts (par exemple, liaison de non frottement).

Scanned by CamScanner

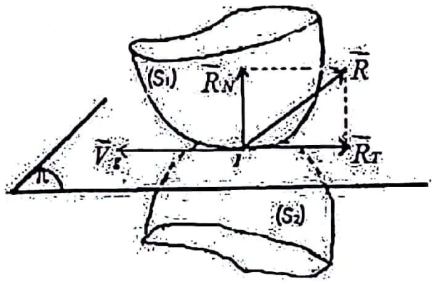
Considérons deux solides (S_1) et (S_2) en contact. Réellement le contact, se fait suivant une surface, entre deux solides. Dans ce qui suit on considérera que cette surface est très petite (contact quasi ponctuel).

- **Torseur des efforts de liaison :**

Les efforts de liaisons ou actions de contact résultent d'interactions microscopiques entre les particules de (S_1) et (S_2) qui sont très rapprochées au voisinage du domaine de contact. On schématise ces efforts par le torseur : $\left[T_{F_L}^{2\to 1}\right] = \begin{cases} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_I}^{2\to 1} \end{cases}_I$

On appelle ce torseur : torseur des efforts de liaison où $\vec{R}$ est la résultante générale des actions du système matériel (S_2) sur le système matériel (S_1) et $\overrightarrow{M_I}^{2\to 1}$ le moment de ces actions en un point I du domaine de contact.

Décomposition de la réaction $\vec{R}$:



$$\boxed{\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t}$$

Avec :

- $\vec{R}_n$ est la réaction normale, elle est toujours dirigée vers le solide auquel elle est appliquée (force répulsive). Elle ne dépend ni de la nature des surfaces en contact ni de la vitesse de glissement $\vec{V}_g$ entre deux solides. Elle disparaît lorsque cesse le contact.
- $\vec{R}_t$ est la réaction tangentielle ou force de frottement.

Remarque :

- Si le contact **est ponctuel** au point I alors $\overrightarrow{M_I}^{2\to 1} = \vec{0}$ d'où $\left[T_{F_L}^{2\to 1}\right]$ est un **glisseur.**
- Dans le cas où il n'y a **pas de frottement** la liaison dynamique est dite **parfaite.**

- **Puissance de forces extérieures de contact :**

Soient R_0 un repère de référence et (S_1) et (S_2) deux solides en **contact ponctuel** en I . (S_2) **est fixe dans** R_0

Scanned by CamScanner

$$P(S_2 \to S_1 / R_0) = [T_V / R_0]_I \cdot [T_{F_{ext}}{}^{2\to 1}]_I$$

$$Avec: \ [T_V / R_0]_I = {}_I\begin{cases}\vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(I \in S_1 / R_0) = \vec{V}_g(S_1/S_2)\end{cases} \ et: [T_{F_{ext}}{}^{2\to 1}]_I = {}_I\begin{cases}\vec{R} \\ \vec{M}_I(\vec{R}) = \vec{0}\end{cases} (glisseur)$$

$$Donc: \ P(S_2 \to S_1 / R_0) = \vec{V}_g(S_1/S_2).\vec{R} + \underbrace{\vec{\Omega}(S/R_0).\vec{M}_I(\vec{R})}_{=0}$$

$$D'où: \ \boxed{P(S_2 \to S_1 / R_0) = \vec{V}_g(S_1/S_2).\vec{R}}$$

Remarque :

La puissance dans le cas d'un contact ponctuel est nulle lorsque :

- $\vec{R} \perp \vec{V}_g(S_1/S_2)$: Absence de frottement.
- $\vec{V}_g(S_1/S_2) = \vec{0}$: Absence de glissement.

2-Degrè de liberté d'un système :

- Les liaisons sont dites **holonomes** si les équations ou les inéquations qui les expriment ne font intervenir les vitesses et ne font éventuellement intervenir le temps que de façon explicite. Les relations traduisant les liaisons holonomes sont de la forme :

  $$f(q_1, q_2, ..., q_N, t) = 0 \ \text{Ou} : (f(q_1, q_2, ..., q_N, t) \geq 0 \ ou \leq 0)$$

  Lorsque la liaison s'exprime par une équation est dite : **bilatérale.**
  Lorsque la liaison s'exprime par une inéquation, la liaison est dit : **unilatérale.**

- Une liaison entraînant une équation dans laquelle interviennent les vitesses est dite **non holonome.** Dans certains cas particuliers, il arrive que des conditions de liaison non holonomes conduisent, par une intégration simple à des équations ne faisant pas intervenir les vitesses. Les liaisons de ce type sont dites **semi-holonomes.**

- Soit un système Σ à N paramètres primitifs. Si l désigne le nombre de liaisons bilatérales holonomes (et éventuellement semi-holonomes) il suffit de connaitre $(N-l)$ paramètres, les l autres paramètres étant calculables à l'aide des équations de liaisons. Le nombre minimal $(N-l)$ de paramètres nécessaires pour décrire le système Σ est appelé **degré de liberté** du système Σ. Dans le calcul du degré de liberté, les inéquations exprimant des liaisons unilatérales n'interviennent pas.

3- Actions de contact- Lois de Coulomb

Les lois de Coulomb introduisent les frottements de glissement entre solides. Elles sont déterminées expérimentalement :

➢ *Cas où il n'y a pas glissement* $\vec{V}_g = \vec{0}$ *:*

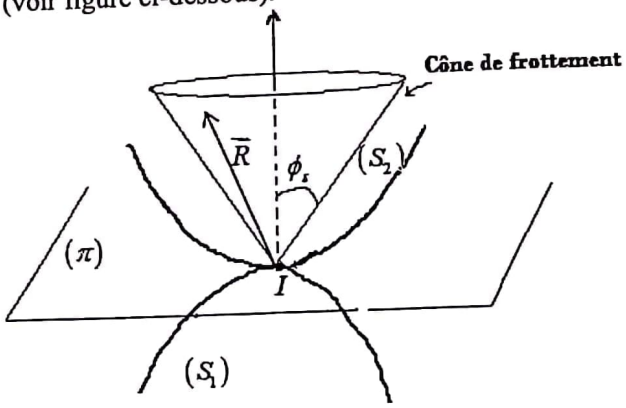
Dans ce cas, le solide (S_1) est **en équilibre** par rapport au solide (S_2) ou bien le solide (S_1) **roule sans glisser** par rapport au solide (S_2).

Scanned by CamScanner

Expérimentalement, on vérifie les propriétés suivantes appelées lois de Coulomb de frottement :

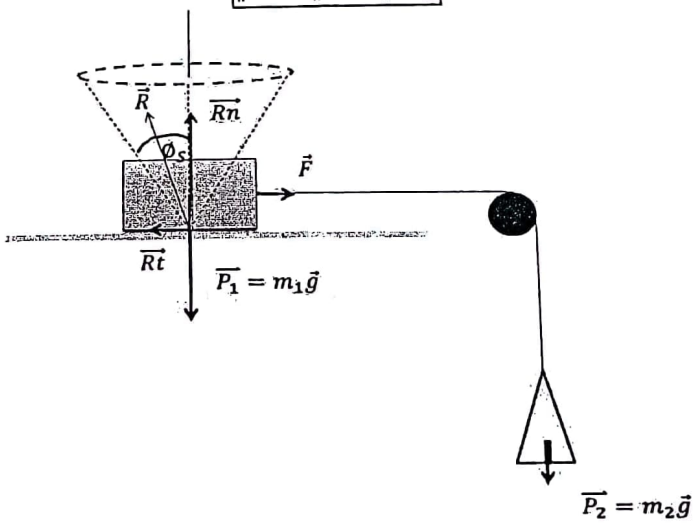
- ✓ Il n'y pas de glissement tant que : $\boxed{\|\vec{R}_t\| \leq f_s \|\vec{R}_n\|}$ avec : f_s est le coefficient de frottement statique.
- ✓ Le coefficient de frottement statique f_s est indépendant de l'aire de surface de contact.
- ✓ Le coefficient de frottement statique f_s est indépendant de $\|\vec{R}_n\|$.

Géométriquement, la réaction $\vec{R}$ est située à l'intérieur d'un cône de révolution, d'axe la normale en I au plan (π), de sommet I et de demi-angle $\phi_s = \arctan f_s$; ce cône est appelé cône de frottement (voir figure ci-dessous).



Pour mesurer la valeur de f_s, on exerce sur le solide (S_1), en équilibre sur le solide (S_2), une force de traction $\vec{F}$ située sur le plan tangent, On peut montrer que la vitesse de glissement reste nulle tant que $\|\vec{F}\|$ n'atteint pas une valeur maximale telle que :

$$\boxed{\|\vec{R}_{t,\max}\| = f_s \|\vec{R}_n\|}$$



Scanned by CamScanner

➢ *Cas où il y a glissement* $\vec{V}_g \neq \vec{0}$:

$\vec{R}_t$ est toujours colinéaire à $\vec{V}_g$ et dans le sens contraire.

Si on fixe la vitesse de glissement $\vec{V}_g$, il existe une relation expérimentale entre $\|\vec{R}_t\|$ et $\|\vec{R}_n\|$ donnée par :

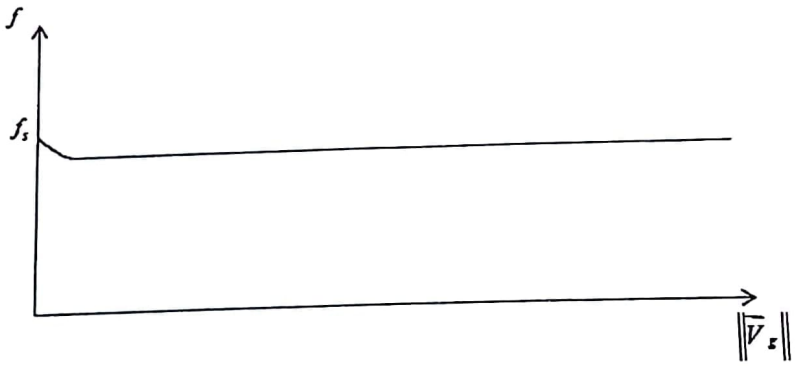
$$\boxed{\|\vec{R}_t\| = f\|\vec{R}_n\|}$$

f : est le coefficient de frottement dynamique de glissement.

On définit aussi l'angle de frottement dynamique ϕ avec : $\tan(\phi) = \dfrac{\|\vec{R}_t\|}{\|\vec{R}_n\|}$.

Le coefficient de frottement de glissement f dépend de la nature et de l'état des surfaces en contact :

Matériaux en contact	Coefficient de frottement dynamique	Coefficient de frottement statique
Acier/Acier	de 0,1 à 0,2	de 0,15 à 0,25
Acier/Bronze	de 0,09 à 0,11	de 0,1 à 0,12
Acier/Fer	de 0,2 à 0,35	de 0,3 à 0,4
Pneu/Route	de 0,3 à 0,6	de 0,6 à 1,2



Le coefficient de frottement dynamique est inférieur au facteur statique : $f \prec f_s$ .Il est aussi indépendant de $\|\vec{V}_g\|$. Cependant, dans de nombreux cas, on observe que la valeur de f est sensiblement constante après le départ de la valeur de f_s (voir figure ci-dessus).

Scanned by CamScanner

Références

1- PERES, Mécanique générale, quatrième édition, Masson, 1994
2- Gamal Zeggwagh, Mécanique des systèmes, cours, exercices et problèmes résolus, Afrique Orient 2006.
3- Rachid MESRAR, Cours de Mécanique du solide indéformable, université Ibn Zohr, Faculté des sciences d'Agadir, Département de physique.
4- S. Pommier & Y. Berthand, Mécanique générales, Dunod, Paris, 2010.
5- O. B1endaou, Cours de Mécanique du solide indéformable, université AbdelMalek Essaâdi, Faculté des sciences de Tétouan, Département de physique.
6- M. loulidi, Mécanique du solide, Département de physique, Faculté des sciences, Université Mohammed V – Agdal Rabat

Scanned by CamScanner